Limite des décompositions additives

OBJECTIFS ET CHOIX MATHEMATIQUES

L'objectif de cette unité est de mettre en évidence :

- que les dix premiers nombres permettent de désigner tous les nombres si grands soient-ils ;
- que la décomposition additive pour désigner des très grands nombres atteint rapidement ses limites ;
- qu'il faudra donc trouver une autre manière de désigner les très grands nombres.

Cette unité prend appui sur la relativement bonne connaissance de la comptine des noms de nombres (apprentissages scolaires ou non) qu'ont les enfants pour désigner de nouveaux NuméRas à numéro auxquels il faudra attribuer un dossard et sur la connaissance par les enfants que le suivant de tout nombre s'obtient en ajoutant un au nombre qui le précède.

Ainsi, les grands nombres seront écrits, dans le registre des écritures mathématiques avec un maximum de 9 afin d'être les plus courtes possibles comme par exemple 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 3.

Mais de telles désignations des nombres s'avèrent vite très peu commodes… ce qui préparer le chapitre suivant : la construction du système de numération décimale de position.

Du point de vue mathématiques, les principales notions vues ou revues sont les suivantes :

- tout nombre a un suivant immédiat que l'on obtient en ajoutant 1 au nombre précédent ($n \rightarrow n + 1$),
- pour former une écriture additive la plus courte possible, on fait des paquets de taille maximale, c'est-à-dire, dans cette unité, des écritures comportant un maximum de 9 (s'y ajoute un reste strictement inférieur à 9),

Cette unité est aussi une approche écrite de la division euclidienne car produire des écritures les plus courtes à la manière de tel ou tel NuméRa à numéro, c'est former l'expression d'une division euclidienne comme le montre l'écriture la plus courte suivante proposée par RaQuatre pour désigner une grande quantité d'objets : 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 qui correspond à la division euclidienne de 23 par 4 ($23 = 5 \times 4 + 3$).

Cette unité permet donc

- d'aborder des problèmes de partage (nombre de parts, valeur d'une part).
- de réaliser de très nombreuses missions de calculs.

ACTIVITES EN MATHEMATIQUES

Introduction

Les activités mathématiques qui accompagnent cette unité relèvent des décompositions additives de très grands nombres. Tous les nombres peuvent en effet, quelle que soit leur taille, s'écrire sous forme additive à partir des dix premiers nombres. Mais décomposer des grands nombres avec les seuls nombres 0 à 9 conduit souvent à des écritures très longues, trop longues pour être facilement reconnues et pour être retenues pour une commande orale par exemple.

Chaque NuméRa à numéro peut cependant réduire toute écriture additive en utilisant un maximum de fois le nombre inscrit sur son dossard. Ceci donne l'occasion de transformer des écritures en mobilisant un maximum de fois le nombre associé à chaque NuméRa à numéro, auquel se rajoute un reste inférieur strictement à ce nombre. On reconnait là l'écriture d'une division euclidienne, écriture qui conduira à la résolution de quelques problèmes relevant de la division.

L'observation de la longueur des écritures montre que, dans l'absolu, RaNeuf réalise toujours des écritures plus courtes[1] que tous les autres NuméRas. C'est donc en mobilisant un maximum de 9, c'est-à-dire en formant des paquets les plus gros possibles à ce stade de l'évolution des mathématiques sur Gée, que seront écrits les dossards de tous les nouveaux NuméRas à numéro. Le processus de construction des nombres qui prévaut alors est fondé sur le fait que le successeur de tout entier n s'obtient en ajoutant 1 à l'entier précédent. Le successeur s'écrit alors $n + 1$.

Ces écritures deviennent vite illisibles, ce qui va montrer la limite des désignations additives des nombres.

Le choix a été fait de désigner dans un premier temps les grands nombres en langue naturelle puisque de nombreux élèves connaissent une liste de noms de nombres qui dépasse dix. Le processus de désignation à deux chiffres des nombres sera introduit dans l'unité suivante en réponse à un problème (la quasi impossibilité de lire de telles écritures additives) et l'association entre désignations en langue naturelle et en écriture chiffrée sera alors établie suite à un travail d'analyse des noms de nombres.

Calcul mental

Toutes les missions proposées sont l'occasion de calculer mentalement. C'est vers cette stratégie que l'enseignant doit conduire les élèves petit à petit en leur demandant de calculer dans leurs têtes, soit en se remémorant les manipulations pour ceux qui ont manipulé, soit directement pour les autres.

Manipulations

Pour les enfants qui en auraient besoin, prévoir un petit matériel en grand nombre pour leur permettre de réaliser les manipulations suggérées par l'histoire ou dans les missions.

[1] Au sens large : signifie que RaNeuf a toujours l'écriture la plus courte mais qu'il peut ne pas être le seul.

Commentaires à propos des missions

Missions	Compétences	Commentaires	Stratégie élève
2. Raccourcir une écriture additive	Calculer. Observer. Décomposer additivement. Composer additivement. Modéliser. Calculer mentalement.	Rappel : les commandes les plus courtes sont celles qui ont le moins de signe +, celles qui ont le moins de paquets. Prévoir le petit matériel (haricots) pour différencier. Cet exercice porte sur des petits nombres pour permettre de bien mettre en évidence les deux stratégies.	En manipulant : l'élève prend un tas de 7 + 8 haricots et fait des paquets respectivement de 4, de 5 ou de 6 haricots. Il décrit ensuite mathématiquement la situation en écrivant le nombre total de haricots sous la contrainte propre à chaque NuméRa. Par le calcul : voir corrigé. Conserver une **trace écrite des stratégies**.
3 Raccourcir une écriture additive	cf. Mission 2. Comparer. Justifier.	La consigne est légèrement différente mais veut dire la même chose celle de la mission 2. Comparer les longueurs des écritures additives est un exercice relatif à cette mission. Plus les paquets sont gros, plus les écritures sont courtes.	cf. Mission 2. Comparer les longueurs des écritures par dénombrement des signes +. Justifier le fait qu'une consigne est plus courte : parce que les paquets sont les plus gros possibles pour RaNeuf. **Trace écrite** de cette conclusion.
9. Décomposer additivement (4)	Dénombrer Recherche exhaustive. Décomposer additivement. Travail sur les représentations d'objets.	Voir correction déraillée dans le fichier cp-auto-com-9.pdf Essayer de faire passer l'enfant d'une stratégie par manipulation à une stratégie par le calcul.	Isoler des paquets dont le nombre d'éléments correspond au NuméRa mentionné. Stratégie moins performante : cocher les points au fur et à mesure que l'on dénombre un paquet de *n*, écrire ce nombre et recommencer. Trop de risques d'erreurs, mauvaise visualisation. Stratégie à privilégier : le calcul (voir correction).
11. Résoudre un problème de partage (division euclidienne)	Associer une écriture mathématique à une situation. Modéliser. Simuler. Justifier. Représenter.	Il s'agit d'un problème de partage dans lequel on visualise le nombre de parts grâce à l'écriture mathématique. Demander d'expliquer la situation en reformulant. Il s'agit de permettre à l'élève de comprendre que dans l'écriture 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 chaque nombre 4 écrit correspond à une page pleine du cahier. Le nombre de 4 écrits correspond à un nombre de parts dans un problème dit de « division-partage ». *Il peut remplir5 pages parce que le nombre 4 est écrit cinq fois et qu'il reste moins de 4.*	Représentation : dessiner des rectangles représentant les pages, placer 4 signes par pages. Puis dénombrer les pages. Manipulation : prendre les haricots, puis les poser sur des pages et dénombrer les pages. Constater que le nombre de pages remplies est le même que le nombre de 4 écrits dans l'écriture du nombre. Conserver une **trace écrite** de l'association nombre de 4 écrits et nombre de pages remplies.

12. Résoudre un problème de partage (division euclidienne)	Modéliser Représenter ; Chercher. Encoder.	Il s'agit d'un problème de partage dans lequel on recherche la valeur d'une part. On rédige ensuite une écriture mathématique qui permet de vérifier. La consigne est double : chacun a autant que les autres (le partage est dit « égal » et a la valeur maximale possible. Cette mission consolide, avec un autre point de vue, le travail effectué dans la mission 11 puisque les justifications mathématiques sont identiques. L'écriture de la division euclidienne relative à ce partage est : 9 + 9 + 9 + 2 oranges. Chaque fils reçoit 9 oranges. Il reste 2 oranges au papa. Proposer d'autres situations analogues en faisant varier les différents paramètres, afin d'entrainer les élèves à effectuer par tâtonnements des partages et à associer ceux-ci à des écritures du type « division euclidienne ».	Manipulation : prendre un tas de 5 + 8 + 9 + 4 + 3 haricots, les répartir au maximum possible dans trois tas, chacun correspondant à un fils. Les deux oranges qui restent ne peuvent plus être partagées car leur nombre est inférieur au nombre de fils. Dessin : représenter chaque orange par une croix. Les distribuer de manière égale dans trois zones représentant chacune un fils. Plusieurs façons de travailler : partir du paquet de 9 oranges, en donner trois à chacun, écrire « il reste 5 + 8 + 0 + 4 + 3 oranges ». Prendre le paquet de 8, en donner deux à chacun, écrire : « il reste 5 + 2 + 0 + 4 + 3 oranges », donner deux oranges à chacun (en en prenant une dans le paquet de 2), écrire : « il reste 1 + 4 + 3 oranges » etc. Calcul : compléter une écriture comme __ + __ + __ + __ en ayant prévu qu'il peut y avoir un reste. Former par essais et erreurs les paquets les plus gros possibles (de même taille) dans trois emplacements représentant les fils. **Conserver des traces écrites des stratégies.**
13. Résoudre un problème de partage (division euclidienne).	Modéliser. Procéder par analogie. Chercher.	Le travail essentiel de l'élève est de comprendre que chaque paquet de quatre yaourts correspond à l'écriture d'un 4 dans le nombre total de pots de yaourts, soit 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4. Cela revient à écrire comme RaQuatre. *Le laitier peut faire six paquets de quatre yaourts. (Il ne lui reste aucun yaourt.)* Proposer d'autres exercices de ce type en faisant varier les paramètres.	Manipulation et simulation : prendre un tas de : 2 + 1 + 7 + 5 + 6 + 3 haricots pour représenter les yaourts, former des paquets de quatre, compter ces paquets, écrire une égalité et conclure. Calculer (à encourager). Exprimer le fait que fabriquer des paquets de quatre yaourts, c'est écrire le nombre de pots de yaourts comme RaQuatre. La solution s'obtient alors en comptant le nombre de 4 dans l'écriture. La stratégie experte à ce niveau consiste à transformer l'écriture de ce nombre en une écriture égale comportant un maximum de 4 (voir correction). Conserver une **trace écrite**.

FOIRE AUX QUESTIONS

1. Pourquoi cette mise en scène pour travailler les très grands nombres

Les concepts mathématiques prennent davantage de sens en étant enseignés en réponse à des problèmes. Il faut donc trouver un problème qui met en défaut les connaissances précédentes des NuméRas.

Les NuméRas savent désigner des grands nombres avec les écritures additives. Il faut placer les élèves dans une situation qui leur permette de se rendre compte par eux-mêmes des limites des outils dont ils disposent, à savoir la décomposition additive des nombres.

On peut par exemple demander à l'enfant de retenir par cœur une commande comme « Donne-moi 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 7 boites de KisKas » la probabilité de se tromper en passant la commande ou en l'exécutant est grande, surtout si on ne voit pas cette commande écrite et qu'elle est transmise oralement,

Une telle situation montre la nécessité de désigner autrement les nombres en chiffres.

Cette approche permet en outre de proposer aux élèves d'effectuer de très nombreux calculs qui consistent à transformer sous contraintes un membre d'une égalité, tout en trouvant une certaine motivation à ces calculs.

2. Pourquoi utiliser d'abord les noms de nombres en langue avant de définir les écritures mathématiques de ces nombres ?

Les tests menés au début de la première année du cycle 2 montrent que de très nombreux élèves connaissent assez loin et de manière stable la liste des noms de nombres. Cette litanie est apprise bien souvent en dehors de l'école, à la maison, avec d'autres enfants, à l'école maternelle jusqu'à une trentaine, lors de rituels pour compter les présents, elle apparait aussi dans le calendrier, etc. Elle va donc servir à désigner des nombres plus grands que neuf.

Ensuite, au chapitre suivant, en réponse au problème évoqué en 1., les désignations chiffrées systématiques des nombres dans le système de numération décimale vont être mises en place. L'association entre les désignations verbales et chiffrées sera alors effectuée. Une analyse morphologique des noms de nombres eux-mêmes facilitera cette mise en correspondance et permettra aux élèves ne connaissant pas la liste des noms de nombre de l'apprendre et à tous de la comprendre.

3. Pourquoi proposer des problèmes « de division » à ce stade ?

Comme on peut le remarquer, écrire des nombres sous la forme la plus courte possible (problèmes d'optimisation) à la manière d'un ou l'autre des NuméRas à numéro, c'est former une écriture qui n'est autre qu'une division euclidienne. Pourquoi, dès lors, se refuser de donner du sens à de telles écritures qui consistent à effectuer des partages égaux et maximaux, pourquoi se priver de donner du sens aux écritures mathématiques rencontrées ? Pourquoi se priver de donner sens à la résolution de problèmes relevant de la division ?