OBJECTIFS ET CHOIX MATHEMATIQUES

Cette unité vise à montrer l'utilité d'un signe mathématique pour transcrire un concept et le caractère conventionnel de la création ou du choix d'un tel signe.

Elle introduit donc

au niveau des connaissances :

- le signe =, pour indiquer que deux écritures sont égales (qu'elles réfèrent au même nombre)
- le signe ;≠, pour traduire que deux écritures ne sont pas égales (qu'elles ne réfèrent pas au même nombre) ;
- le mot *égalité* (pour traduire la relation qui existe entre deux écritures égales).

au niveau des compétences, des savoir-faire :

- la capacité à montrer par le calcul, en transformant des expressions, que deux écritures différentes sont égales
- reconnaitre si deux écritures sont égales,
- transformer une égalité en une autre,
- compléter des égalités lacunaires.

ACTIVITES EN MATHEMATIQUES

Préliminaire

Les élèves considèrent très souvent que le signe de l'égalité est un déclencheur du calcul qui permet obtenir l'expression chiffrée la plus courte possible, l'expression canonique d'un nombre. Une telle conception peut engendrer des difficultés dans toute la scolarité des élèves. Un exemple au niveau de l'école est l'écriture conventionnelle des fractions, comme ¼ par exemple et son association à une autre écriture 0,25. Il n'y a pas de processus de calcul maitrisé par les élèves qui permet de passer de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale. La conception du signe de l'égalité comme déclencheur de calcul est alors mise en défaut, ces deux expressions différentes étant associées au même nombre d'une autre manière qu'en effectuant un calcul (au moins au début de leur rencontre). C'est pour cette raison que la méthode insiste sur le caractère conventionnel du choix de ce signe et insiste surtout sur le sens fondamental de ce signe = qui sert à dire que deux expressions désignent le même nombre. Ce qui implique que n'importe laquelle des expressions égales peut se substituer à toute autre expression égale dans n'importe quelle circonstance.

L'unité précédente a effectué le travail du sens de « est égal à » ou « égaler » au niveau de la langue. Cette unité le consolide au niveau des écritures mathématiques en intégrant le calcul.

Les élèves peuvent dès lors effectuer de très nombreuses transformations additives d'écritures de nombres (incluant la soustraction), sans pour autant rechercher la forme canonique.

Le sens du signe égal se construit aussi par les manipulations possibles des égalités.

Cette unité vise donc à développer les compétences suivantes :

- reconnaitre si deux écritures sont égales,
- transformer une égalité en une autre,
- compléter des égalités.

Introduction

Les activités mathématiques qui accompagnent cette unité portent sur l'utilisation des signes = et ≠, et visent à faire émerger quelques stratégies qui permettent :

- de comparer des écritures (dire si elles sont égales ou non),
- de compléter des égalités par observation en faisant apparaitre dans un membre une partie de ce qu'il y a dans l'autre membre, etc.
- de trouver d'autres écritures d'un même nombre,
- une égalité étant donnée, d'en fabriquer d'autres dont les membres correspondent à des désignations de nombres différents de l'égalité de départ,

Ces activités visent aussi à fréquenter en les manipulant des propriétés comme la commutativité (a + b = b + a, pour tout entiers a et b) et l'associativité de l'addition (pour tous les entiers a, b et c on a (a + b) + c = a + (b + c), propriétés qui ne doivent pas être énoncées comme telles aux élèves, mais vécues de manière empirique.

Celles-ci seront formalisées bien plus tard. Mais les élèves doivent les maitriser dans la pratique puisqu'elles sont à la base du calcul mental, du calcul réfléchi et qu'elles sont même utiles dans les calculs posés.

Activités suggérées

Manipulations

Afin de bien comprendre les transformations opérées dans le registre[1] des écritures symboliques mathématiques, les élèves ont besoin de prendre appui sur des manipulations et d'observer puis de traduire en langage mathématique ce qu'ils réalisent dans la pratique. Aussi, bon nombre de missions nécessitent de manipuler au début. Les manipulations contribuent à la compréhension du problème donné.

Des gros haricots constituent un matériel peu couteux, simple à utiliser et pertinent.

Les manipulations décrites dans l'unité précédente peuvent être mises en œuvre dans cette unité. Elles peuvent trouver place dans chacun des exercices répétitifs puis, petit à petit, céder leur place aux « calculs de tête », condition nécessaire pour entrer dans les mathématiques. Les manipulations seules ne constituent pas une activité mathématique, mais y préparent.

Quelques manipulations spécifiques

Toutes les manipulations reposent sur les principes

- qu'une écriture additive désigne un nombre d'objets que l'on peut séparer en paquets disjoints et que le nombre d'objets du tout est égal à la somme des nombres d'objets de chacune des parties,
- que l'on ne change pas le nombre d'objets total en modifiant les paquets d'un même tas soit par regroupement, soit par dissociation.

Dans cette unité et les suivantes, nous convenons d'appeler *tas* l'ensemble des haricots (ou autres objets) qui correspondent au nombre désigné par un membre d'une égalité. Nous appelons *paquet* toute partie de ce tas dont le nombre d'objets est indiqué par un terme de l'écriture additive du membre donné.

Ex : l'écriture 4 + 3 + 1 correspond à un tas de 8 haricots, et ce tas est décomposé en trois paquets, l'un de 4 haricots, l'autre de 3, le dernier de 1.

<u>Pour comparer deux écritures ne comportant que des signes +</u>

Prendre deux tas de haricots, l'un que l'on placera à gauche de l'élève, l'autre à droite. Le tas de gauche est constitué en formant les paquets décrits par le membre de gauche de l'écriture, celui de droite par les paquets indiqués par le membre de droite de l'écriture.

Deux stratégies permettent de conclure[2]

- la comparaisons paquets par paquets
  - si chaque tas est formé des mêmes paquets (comme par exemple pour comparer 7 + 8 et 8 + 7 ou mission 5), la conclusion est immédiate : il y a égalité.
  - si les deux tas ont des paquets qui se correspondent un à un, sauf un, la conclusion tombe : il n'y a pas égalité. Il est donc nécessaire de former un maximum de paquets identiques dans un tas en prenant l'autre tas pour référence.
  - Ex : comparer 3 + 5 + 2 et 5 + 2 + 4 . Les deux membres conduisent à la formation de deux paquets identiques, le troisième étant différent, il n'y a pas égalité).
- la transformation des paquets d'un tas pour faire apparaitre les paquets de l'autre tas

---

[1] Pour un exposé rapide de la notion de registres sémiotiques, voir *J'apprends à résoudre des problèmes*, guide pédagogique Cycle 2 Niveau 1, Nathan, 2013. Pour un exposé complet, voir R. Duval, *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, 1995.

[2] Une stratégie à éviter à ce stade des apprentissages : associer un à un les haricots.

   - Ex : mission 3 pour justifier l'égalité 1 + 2 + 4 = 3 + 4. Le tas de droite comporte un paquet de 3 haricots et un paquet de 4 haricots. On peut décomposer le paquet de trois éléments en un paquet de 1 élément et un paquet de 2 éléments. On obtient ainsi les mêmes paquets que ceux du tas de gauche. Il y a donc égalité. On peut aussi grouper le paquet de 1 élément du tas de gauche avec celui de 2 éléments du même tas. On obtient un paquet de 3 éléments et un paquet de 4 éléments. Le tas de gauche est alors identique à celui de droite. Il y a égalité.

<u>Pour comparer des écritures comportant un ou plusieurs signes -</u>

- En considérant que les écritures décrivent un processus de formation de tas de haricots :
  former un tas à gauche en suivant les indications de l'écriture de gauche et un tas à droite en suivant les instructions de l'écriture de droite, puis comparer comme décrit ci-dessus.
   - Ex : mission 6. Former le tas de gauche en prenant 7 haricots dont on enlève ensuite 4 haricots. Former le tas correspondant à l'écriture de droite en prenant d'abord 5 haricots, dont on enlève immédiatement 2 haricots. Comparer les tas qui restent pour conclure à l'égalité. Il reste 3 haricots dans chacun des tas. Il y a donc égalité.

     Difficulté : dans le cas de la soustraction, on perd trace des opérations effectuées, la vérification n'est plus possible après avoir enlevé des objets.
- En considérant que chacune des deux écritures représente une relation partie-tout[3]. Ex : mission 1, ligne 12. Comparer 8 – 5 et 9 – 4
   - L'écriture 8 – 5 désigne le nombre d'éléments du complément d'un paquet de 5 haricots dans un tas de 8 haricots. On prend donc un tas de 8 haricots, on partage ce tas et on forme un paquet de 5 haricots (on ne les enlève pas). On obtient deux paquets, l'un de 5 haricots (celui donné par l'écriture) et un autre de 3 haricots (réalisé par la séparation du premier paquet).
   - On procède de même pour le second membre en prenant un tas de 9 haricots. On forme un paquet de 4 haricots. Le paquet qui s'en déduit contient 4 haricots et pas 3. Il n'y a donc pas égalité.

<u>Pour compléter une écriture, l'autre étant donnée</u>

Un même tas peut être décrit par des écritures différentes en fonction des paquets qui le constituent. Un tas de 3 + 5 + 1 haricots est aussi un tas de 3 + 6 haricots. La reconfiguration de la disposition des haricots permet de fabriquer des écritures différentes désignant un même nombre de haricots. C'est sur ce principe de reconfiguration et de l'association avec les écritures chiffrées que sont élaborées les stratégies permettant de compléter des écritures.

- Exemple : Dans la mission 9, compléter 5 + 7 = 3 + ___, le membre de gauche indique que l'on a un tas de 5 + 7 haricots. Le membre de droite affirme que ce tas peut aussi être constitué d'un paquet de 3 haricots et d'un autre paquet dont il s'agit de trouver le nombre d'éléments. La stratégie suivante peut être mise en oeuvre :
   - former un paquet de 5 + 7 haricots, ne laissant apparents les deux tas (un de 5 et l'autre de 7 haricots)
   - former à partir de ce paquet constitué des deux tas, un tas de 3 haricots (par exemple en enlevant deux haricots au tas de 5) ce qui donnerait l'écriture 3 + 2 + 7 correspondant aux trois tas ainsi formés,
   - le tas de 3 étant ainsi formé, grouper le tas de 7 et le tas de 2, ce qui donne un tas de 3 haricots et un tas de 9 haricots,
   - la solution est donc : 5 + 7 = 3 + 9 haricots.
- Exemple : Dans la mission 10, compléter 8 +4 + 3 = 7 + 2 + ___ . La manipulation est illustrée par les photos successives.

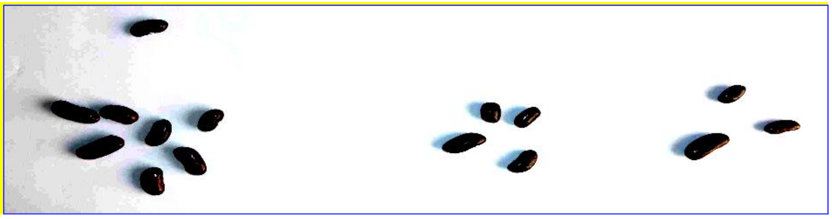
[3] Pour la construction d'une représentation graphique équivalente : voir *J'apprends à résoudre des problèmes*. Nathan 2013, p 22 et suivantes.

•

8 + 4 + 3

On forme un tas de 7 haricots à partir du tas de 8 haricots, on obtient un nouveau tas de 1 haricot.

7 + 1 + 4 + 3

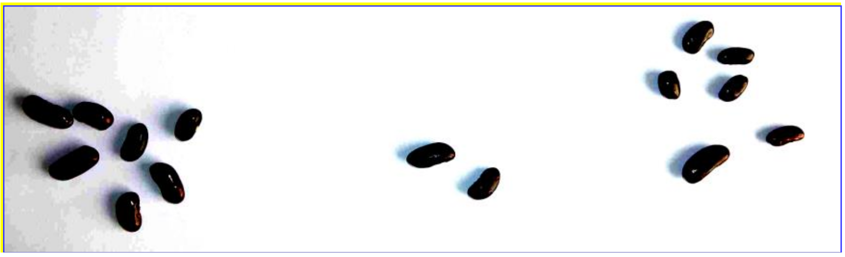


On a un tas de 7 haricots, il faut former un tas de 2 haricots. On le forme à partir du tas de 4 haricots (on peut procéder autrement).

7 + 1 + 2 + 2 + 3

On a maintenant les deux paquets cherchés, un paquet de 7 et un paquet de 2, on rassemble les autres haricots dans un seul paquet (indiqué par un seul emplacement : ___).

7 + 2 + 6



On a créé le paquet cherché qui permet de compléter l'égalité **8 +4 + 3 = 7 + 2 + ___** en **8 +4 + 3 = 7 + 2 + 6.**

Note importante : Traduire au fur et à mesure toutes les manipulations par les écritures mathématiques correspondantes, afin que l'élève s'imprègne des associations (tas, nombre d'éléments du tas figurant dans la désignation mathématique du nombre d'éléments du paquet concerné.

Quelques stratégies de calcul

Dans les calculs proposés aux élèves, il n'est pas question de dépasser 9[4]. C'est à dessein que la fiction a été écrite. Les contraintes des NuméRas se transfèrent à des contraintes pour les

[4] A ce stade de l'histoire, les NuméRas ne connaissent que les nombres de 0 à 9, ce ne sont donc que ces écritures de nombres que les élèves vont utiliser.

élèves, contraintes les obligeant à décomposer et à recomposer sans cesse en fonction d'un objectif donné. Effectuer les sommes, ce que certains élèves pourraient faire, ne ferait que leurrer l'élève, l'enseignant et les parents sur les réelles capacités mathématiques de l'enfant. Fairec des mathématiques est bien souvent l'art de manipuler des égalités et des inégalités dans un objectif donné.

Trouver immédiatement le résultat juste en comparant deux écritures après avoir effectué le calcul de chacune d'elle, prive l'élève d'un entrainement abolument nécessaire. Ce faisant, l'élève fait vivre le calcul mental avec un objectif.

Ex : Trouver d'autres écritures d'un même nombre, compléter 3 + 5 + 7 = ___

- Première stratégie par décomposition seule

  3 + 5 + 7 = 1 + 2 + 5 + 7 parce que 3 = 1 + 2 ou

  3 + 5 + 7 = 3 + 5 + 4 + 3 parce que 7 = 4 + 3, etc.
- Deuxième stratégie par composition seule :

  3 + 5 + 7 = 8 + 7 parce que 3 + 5 = 8
- Troisième stratégie par une combinaison des deux :

  3 + 5 + 7 = 3 + 5 + 4 + 3 parce que 3 + 5 = 8 et que 7 = 4 + 3.

On peut bien évidemment toujours utiliser le nombre 0 pour modifier l'écriture d'une égalité. Il suffit de l'ajouter à l'un des membres d'une égalité sous une forme que l'on choisit (3 – 3, 4 – 4, etc.).

Par exemple pour trouver une autre égalité à partir de 5 = 5 : ajouter 0 sous la forme 3 – 3 au premier membre. donne :

5 + 3 – 3 = 5 ou encore 8 – 3 = 5 et on peut continuer ainsi...

Quelles règles empiriques les élèves peuvent-ils découvrir ?

Comparer deux écritures d'un même nombre comportant exactement un signe + dans chaque membre. Ex : mission 1, comparer 7 + 8 et 6 + 9

Les élèves peuvent voir que si on convient que chaque membre représente le nombre de haricots d'un tas, le tas dit de gauche correspondant à 7 + 8 est formé d'un paquet de 7 haricots et d'un autre paquet de 8 haricots. Si l'on enlève un haricot au paquet de 7 et qu'on l'ajoute au paquet de 8, on obtient un paquet de 6 et un paquet de 9, c'est ce que traduit le second membre de cette égalité.

On peut suggérer aux élèves de relever de nombreuses écritures qui fonctionnent de la sorte, puis d'en déduire une règle empirique, fort efficace pour transformer ou comparer des écritures :

- « on ne change pas le nombre de haricots d'un tas si on enlève un haricot à un paquet et qu'on l'ajoute à un autre paquet »
- « on ne change pas le nombre de haricots d'un tas si on enlève deux haricots à un paquet et qu'on les ajoute à un autre paquet »,
- « on ne change pas le nombre de haricots d'un tas si on ajoute un haricot à un paquet et qu'on l'enlève à un autre paquet », etc.

On peut faire de même jusqu'à vider complétement un tas ou parvenir à un nombre cible dans un des paquets. Cette stratégie est fort utile en calcul mental.

Indications et commentaires à propos des missions

Missions	Compétences	Commentaires	Stratégie élève
1. Comparer des écritures de nombres en utilisant le signe approprié	Comparer Calculer Sens de l'égalité Utiliser à bon escient le symbole = et ≠.	L'enseignant pourra mettre du matériel à la disposition des élèves et les inciter à utiliser les stratégies décrites dans les pages précédentes.	Calcul de tête Manipulations comme décrites pages précédentes Dessins, mais ceux-ci ne sont pas adaptés aux écritures comportant le signe -. Trace écrite des stratégies à écrire dans le cahier élève.
2. Comparer des écritures de nombres	Observer Calculer Décomposer, recomposer additivement	Les élèves doivent comprendre que le nombre de RaZeds à sauver est indiqué dans la première colonne, que les deux NuméRas présents sont mentionnés par le début de la décomposition du nombre et qu'il faut chercher le complément, ce qui indiquera quel NuméRa ajouter. Laisser du matériel aux élèves (haricots, NuméRas).	Stratégie par simulation : prendre le nombre de haricots qui correspond au nombre de RaZeds à sauver. Prendre les deux NuméRas indiqués par le membre de droite. Prendre les haricots qui correspondent et compter ceux qui restent. Stratégie à privilégier : calcul
9. Justifier une égalité en calculant (4) .	Observer Calculer Justifier	Application des missions 3, 4 et 6. Les élèves n'effectuent pas les calculs du type 8 + 7 pour trouver les résultats. Ceux-ci ne sont pas encore connus des NuméRas.	Combinaison des missions 3, 4 et 6. Limiter autant que possible le recours au matériel.