OBJECTIFS ET CHOIX MATHEMATIQUES

Cette unité et la suivante sont sans doute les plus importantes de cet ouvrage. En effet, elles visent à donner du sens à une notion que les élèves utiliseront tout au long de leur scolarité et dont dépendent bien des apprentissages ultérieurs comme l'égalité entre des écritures, par exemple ¼ et 0,25.

Le sens profond de l'égalité n'est habituellement que peu enseigné. Pourtant cette notion apparait couramment au tout début des apprentissages par l'utilisation du signe= (qui la traduit dans le registre des écritures mathématiques).

Elle est généralement introduite de manière non explicite pour l'élève, sans que l'un de ses sens fondamentaux, qui consiste à exprimer que deux désignations de nombres réfèrent à un seul et même nombre, ne soit explicité, sans que les transformations majeures que l'on peut effectuer pour prouver une égalité entre deux expressions ne soient travaillées explicitement. Il arrive même fréquemment que ces opérations ne soient pas travaillées du tout.

Le seul sens qui gouverne généralement son introduction est celui de déclencheur de calcul afin de transformer une expression numérique en son expression canonique.

Ainsi, si on pose à quelqu'un la question suivante : « 3 + 4 égale ? », la réponse spontanée est 7, beaucoup moins spontanément 5 + 2 et encore moins facilement 9 – 2. Ce sont pourtant ces deux dernières manières d'exploiter la notion d'égalité qui sont les plus fondamentales car elles permettent de remplacer une désignation d'un nombre par une autre bien plus efficace dans une situation donnée. La pratique usuelle du sens donné à l'égalité ne met pas en relief cette propriété fondamentale.

Pour l'illustrer de manière triviale : le calcul de 8 + 7 est plus simple si on écrit 7 sous la forme 2 + 5.

La notion d'égalité exprime une relation entre deux expressions mathématiques qui peuvent être ou non identiques dans leurs formes mais qui sont des désignations d'un même nombre (pour ce qui relève du domaine numérique) et qui peuvent donc se substituer l'une à l'autre en toute circonstance.

C'est ce sens plus général qu'il convient d'enseigner. C'est celui qui permet donner du sens à « ¼ égale 0,25 » quand l'élève n'a pas le moyen de passer de l'une à l'autre par le calcul.

Le travail en langue sur le sens du verbe *égaler* et de l'adjectif *égal* est l'objet de cette unité essentiellement narrative, mais accompagnée de nombreux exercices absolument fondamentaux.

Le mot *égalité* sera introduit dans l'unité suivante après l'introduction du « = ». Ce signe ne doit donc pas être utilisé dans les missions proposées en accompagnement de cette unité.

Les visées de ce chapitre sont donc les suivantes.

<u>Du point de vue des connaissances :</u>

- Comprendre le sens de l'égalité en mathématique,
- comprendre le sens du mot *égal* en mathématique.

<u>Du point de vue des compétences :</u>

- faire observer différentes désignations de nombres pour les comparer,
- faire manipuler les élèves afin de comparer des désignations de nombres,
- exprimer en langue française l'égalité ou non de deux désignations de nombres.

ACTIVITES EN MATHEMATIQUES

Introduction

Les activités mathématiques de cette unité ont pour objectif principal

- de permettre aux élèves de comprendre que les nombres ont de très nombreuses désignations différentes possibles,
- de comparer des écritures pour affirmer qu'elles sont ou non celles d'un même nombre,
- de transformer des écritures d'un même nombre,
- de commencer à développer des stratégies permettant de passer d'une désignation d'un nombre à une autre de ce même nombre en prenant appui sur les contraintes des NuméRas, en calculant ou enmanipulant.

Activités suggérées

Quelles stratégies ?

Les élèves peuvent

- Manipuler (indispensable au début pour bien comprendre le sens de l'égalité),
- Représenter (les nombres donnés sont représentés par des collections de point, de croix, etc.),
- Calculer mentalement.

Mais, quel que soit le mode de travail utilisé (manipulation, représentation, calcul mental), les stratégies reposent sur les manipulations et les traduisent. Les stratégies sont décrites dans le paragraphe suivant.

Quelle place pour les manipulations ?

Dans toutes les missions présentées, il s'agit d'étudier l'égalité entre deux écritures mathématiques comportant des signes + et/ou –. Il peut être demandé soit de comparer deux écritures existantes (Mission 1), soit d'en compléter une pour obtenir une égalité (Missions suivantes).

Dans un premier temps, il est essentiel que les élèves manipulent des petits objets (les doigts en font partie) pour effectuer les transformations et associer aux deux configurations différentes du même nombre d'objets, leurs écritures différentes, sachant que le cardinal est le même. Le principe mathématique qui sous-tend ce travail est le fait que le cardinal d'une collection est la somme des cardinaux de ses parties et est invariante (tant qu'elle ne subit ni ajout, ni retrait).

Il s'agit de former des représentations d'une quantité à partir d'une écriture mathématique, en tenant compte de la disposition des objets eux-mêmes, activité encore inhabituelle pour les élèves.

Pour montrer que deux écritures sont égales, on peut :

- <u>Procéder par transformation et manipulation</u> : partir d'une écriture, prendre un tas d'objets (le nombre d'objets total que traduit cette écriture), former les paquets comme indiqué dans l'écriture, puis transformer les paquets pour parvenir à illustrer l'autre écriture.

  <u>Exemple évident</u> (Mission 1, ligne 1) : Prendre un tas de 3 objets, organiser ce tas en séparant deux paquets, l'un de 1 objet, l'autre de 2 objets. Et effectuer le constat (le nombre d'objet total n'ayant pas changé) que 3 = 1 + 2.
- <u>Procéder par comparaison et manipulation</u> : prendre deux tas d'objets, l'un qui traduit l'écriture du nombre d'objets d'un membre de l'égalité, l'autre qui traduit le nombre d'objets de l'autre membre de l'égalité, comparer alors le nombre total d'objets en procédant par association un à un.

Exemple (Mission 1, ligne 8) : Prendre trois paquets d'objets (l'un de 3, l'autre de 4, le dernier de 5) pour traduire le membre de gauche (le premier tas), et trois paquets (l'un de 3, l'autre de 2, le troisième de 7) pour traduire le membre de droite (le deuxième tas). Former les deux tas en groupant les paquets et constater que ces deux tas ont le même nombre d'éléments, par exemple par correspondance terme à terme, d'où l'égalité.

Cas du signe – : dans les cas où figure un signe – dans l'écriture d'un des deux membres, on prend le nombre d'objets indiqué par le nombre duquel on soustrait, on effectue les manipulations en enlevant les objets indiqués par l'écriture. Il est alors indispensable de traduire les manipulations opérées en écriture mathématiques au fur et à mesure qu'elles sont effectuées puisque les traces disparaissent au fur et à mesure.

Exemple (Pour montrer que 6 – 2 égale 7 – 3). Prendre 6 objets, écrire 6, enlever 2 objet, écrire 6 – 2. Constater qu'il reste 4 objets. Prendre 7 objets, écrire 7, enlever 3 objets, écrire 7 – 3. Constater qu'il reste 4 objets.

Des deux constats, déduire 6 – 2 égale 7 – 3.

Pour compléter une écriture afin d'obtenir une égalité, on peut :

- Procéder par manipulation à partir de l'écriture décrivant un membre de l'égalité

Exemple (Mission 2, ligne 2) : Prendre un paquet de 6 objets, un paquet de 3 objets, ce qui forme un tas de 9 objets. Isoler un paquet de 4 objets, ce qui isole de fait un paquet de 5 objets. Constater alors que $6 + 3 = 4 + 5$.

Note : pour les missions laissant le choix des paquets traduisant le second membre, on opère de la même manière en choisissant arbitrairement un ou deux premiers paquets à partir d'un tas d'objets représentant le nombre total d'objets.

Exemple (Mission 9). Prendre un tas de 3 + 5 objets, former un paquet de 2 objets, un paquet de 5 objets, il reste un paquet de 1 objet. D'où l'écriture 3 + 5 égale 2 + 5 + 1.

Toutes ces activités permettent aux élèves de se **forger des représentations** qui seront fort utiles en **calcul mental**.

S'il est important de faire manipuler les élèves au début, il est fondamental d'orienter au fur et à mesure de leurs capacités les élèves vers un travail purement écrit dans le registre mathématique, ce qui mobilise du calcul mental.

Il est important d'avoir conscience que le but n'est pas de manipuler, on ne fait pas des mathématiques en manipulant pour réussir des tâches, on fait des mathématiques quand on manipule des objets symboliques comme les écritures des nombres, en les composant, en les décomposant, pour arriver à un but, à une écriture cible.

Il est donc important de manipuler, mais en traduisant en parallèle ces manipulations par des suites de calculs afin de ne plus devoir manipuler par la suite.

Calcul mental

Les questions de calcul mental peuvent être posées de la manière suivante : « Trouver le nombre qui manque pour former une écriture égale dans, par exemple : *trois plus quatre égale cinq plus…*. Faire expliciter les stratégies. Des égalités à trou peuvent être successivement écrites au tableau, les élèves les résolvent mentalement et notent leur réponse.

Indications et commentaires à propos des missions

Missions	Compétences	Commentaires	Stratégie élève
0. Comparer et classer des commandes	Classer Comparer Calculer par décomposition recomposition	Cette mission dite mission 0 a pour seul but de renforcer le fait que tout nombre peut avoir plusieurs écritures différentes et qu'il est indispensable de pouvoir l'indiquer (objet de cette unité).	Voir « Activités suggérées » : stratégies.
1. Comparer des écritures de nombres*	Observer Décomposer additivement Chercher Calculer	Mission destinée à exercer la compréhension des expressions *égal* , *est égal à*.	Calculer mentalement, Représenter les quantités indiquées par des points, Manipuler (voir page précédente). Utiliser les doigts
7. Désigner un nombre de différentes manières (3)*	Calculer Composer Décomposer	L'élève est obligé de dégrouper par exemple en remplaçant 5 par 1 + 4. Il peut utiliser de manière pragmatique la commutativité.	Décomposer, recomposer. Manipuler comme indiqué page précédente.
9. Désigner un nombre de différentes manières (5)	cf. mission 7	La présence du 0 dans le deuxième membre de la première ligne impose le 5. Le 6 dans la deuxième ligne contraint à compléter avec 1. La troisième ligne peut se remplir en continuant la suite 5, 6, par 7 et en enlevant 2.	Stratégies habituelles : Matériel, calcul mental, référence aux suites décroissantes de raison 1 Stratégies plus pertinentes : Compléter la première ligne par la connaissance à la fois du 0 et du sens du signe –. Observer les régularités, compléter les autres lignes en vérifiant.

Foire aux questions

1. Pourquoi passer autant de temps sur la notion d'égalité ? N'est-ce pas du temps perdu ?

Les programmes de 2016, avec l'allongement du cycle des apprentissages fondamentaux, donnent une année de plus pour acquérir ces compétences et connaissances. Encore faut-il savoir ce que recouvre ce terme « apprentissages fondamentaux ».

Cette expression, dans les programmes de 2008, semblait davantage désigner les automatismes que les élèves devaient acquérir en mathématiques, se centrant sur les calculs et la dextérité des élèves à les effectuer. Dans les nouveaux programmes, ces apprentissages fondamentaux relèvent aussi du développement de l'esprit, ceux qui sont liés à l'apprentissage même d'une discipline. Ainsi, ils considèrent que le sens lié aux apprentissages des concepts est premier. Ces concepts doivent donc, et il s'agit là d'une injonction, être enseignés en réponse à des problèmes. C'est plus particulièrement le cas de la notion d'égalité.

Le problème que rencontrent les NuméRas justifie l'introduction du concept fondamental d'égalité, concept sur lequel repose toute activité mathématique du début de l'école obligatoire jusqu'aux plus hauts niveaux de la recherche en mathématiques.

Or, ce concept est peu enseigné et, quand il l'est, il n'est pas explicité et apparait sous la forme d'un signe (=), dont le rôle est essentiellement de déclencher un calcul pour exprimer le membre de gauche sous une forme plus compacte, forme dite canonique, qui devient alors le membre de droite.

Si ce sens ne peut être délaissé, il n'est pas fondamental et se déduit du sens plus général que cette unité construit, en totale conformité avec les nouveaux programmes : « L'introduction et l'utilisation des symboles mathématiques sont réalisés au fur et à mesure qu'ils prennent sens dans des situations d'action, en relation avec le vocabulaire utilisé »[1]. La rubrique « Nombres et calculs » rappelle que le « sens des symboles =, […]. », doit être consolidé par « les comparaisons [qui] peuvent porter sur des écritures usuelles ou non : par exemple comparer 8 + 5 + 4 et 8 + 3 + 2 + 4 […] et en déduire que les deux nombres sont égaux ».

Travailler le sens de l'égalité est donc essentiel et l'enseignant doit y consacrer le temps nécessaire[2].

---

[1] Programmes 2016, préambule de la partie concernant les mathématiques.

[2] Voir : Ressources pour le cycle 2 sur Eduscol, Le calcul en ligne au cycle 2, http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/87/9/RA16_C2_MATHS_calcul_en_ligne_587879.pdf

