La numération de position

OBJECTIFS ET CHOIX MATHEMATIQUES

Cette unité vise quatre objectifs essentiels :

- **introduire la numération de position** en réponse à un problème

  Dans l'unité précédente, les élèves se sont heurtés à un problème : celui des écritures longues des nombres, difficiles à retenir et difficile à lire.

  Il faut donc trouver une solution. C'est l'objectif majeur de cette unité qui introduit la numération de position en réponse à un problème.

- **associer désignations chiffrées et désignations en langue naturelle des nombres** dits, par abus de langage, « nombres à deux chiffres »

  Les auteurs ont fait le choix de désigner tout d'abord en langue naturelle chacun des nouveaux NuméRa à numéro. Il est donc nécessaire d'associer les nouvelles désignations chiffrées des nombres à leurs désignations en langue naturelle. C'est le second objectif de cette unité.

- **faire comprendre les noms de nombres**

  Certains noms de nombres sont arbitraires comme *cinq* ou *six* (si on fait abstraction de leur étymologie), d'autres ne le sont pas et résultent d'un processus de composition relativement clair comme *dix-sept* ou *quatre-vingts*, d'autres enfin relèvent d'un processus de formation plus caché comme *douze* et *quarante*. Ce chapitre propose une analyse comparative des noms de nombres entre différentes langues afin de permettre aux élèves de mieux comprendre les noms de nombre en français.

- **calculer avec des nombres entre 0 et 99**

  La numération de position étant mise en place, il est important de consolider la compréhension du système de numération par des activités de calcul en ligne et la résolution de problèmes mettant en œuvre ces désignations nouvelles des nombres.

- **résoudre des problèmes additifs**

ACTIVITES EN MATHEMATIQUES

Introduction

Cette unité met en place le système de numération de position. Les activités mathématiques de cette unité portent sur

- la formation de paquets de dix pour dénombrer, des dizaines,
- la désignation des unités non groupées en paquets de dix : les **unités libres**,
- la désignation des nombres dans le système de numération de position,
- l'association entre les noms de nombres et les écritures chiffrées,
- l'analyse des noms de nombres (-ante ou -ente, -ze), désignation multiplicatives et additives combinées.

Activités suggérées

Manipulations

Les manipulations sont ici essentielles. Elles consistent à dénombrer des grandes quantités d'objets en formant des paquets de dix objets, des *dizaines*, et en dénombrant les unités non groupées en nombre strictement inférieur à dix, les *unités* que nous disons *libres*.

Matériel

La numération de position procède par groupements de dix, puis de cent, puis de mille, etc. pour désigner les nombres. C'est donc un matériel permettant ces groupements qui est préconisé ici. Afin de contraindre les élèves à former des dizaines, à contrôler leurs procédures pour former ces dizaines, afin de leur permettre aussi de se tromper, le matériel suivant est conseillé :

- des petits objets : haricots, cailloux, petits cubes, etc. en grand nombre,
- des récipients pouvant être ouverts ou fermés permettant de recevoir plus de dix de ces objets, de préférence opaques.

A ce stade, le matériel suivant est donc fortement déconseillé : abaques, boites compartimentées comportant exactement dix alvéoles pour former des dizaines, etc., tout matériel évitant le contrôle par l'élève et lui seul de la formation des dizaines. Les compteurs qui donnent au zéro le statut d'un signe qui comble un vide est aussi à éviter à ce stade puisque nous donnons au zéro le sens du nombre obtenu par soustraction (pour tout n, $n - n = 0$). Ce sens permet de donner davantage de sens au 0 dans 50, 40, puis, 10. Il indique que ces nombres possèdent 0 unités libres dans le système à base dix.

Représentations

Toute cette unité repose sur les représentations puisque tout très grand nombre est représenté par une collection d'objets que l'on manipule (haricots, cailloux, petits cubes, etc). ces collections sont ensuite représentées par des nombres (leurs cardinaux). Des représentations intermédiaires des dizaines et des unités sont nécessaires.

Le cheminement vers la numération de position débute par les manipulations d'objets en les groupant par dizaines, se poursuit par les représentations de ces dizaines sous forme figurales (des dessins analogiques), de même pour les unités, se termine par l'écriture « à deux chiffres » de la quantité à représenter, sans oublier la représentation en langue orale et écrite de ces mêmes quantités.

L'appropriation par l'élève de ces différentes représentations nécessite donc beaucoup de manipulations, de dessins, d'écritures.

Il est fondamental d'associer l'ensemble des représentations d'un même nombre afin de bien mettre en évidence les dizaines et les unités libres.

Représentation des nombres en langue naturelle et en chiffres

Conventionnellement, la taille des paquets à la base de notre système de numération est fixée à dix. Mais aucun signe n'existe pour désigner ce nombre dix, il ne faut pas créer de nouveau signe, sauf peut-être de manière provisoire. La dénomination *paquet de dix*, provisoirement utilisé, sera remplacée par *dizaine*. Le mot *unité* permet de désigner des « paquets » d'un objet comme on désigne par le mot *dizaine* des paquets de dix objets. Une dizaine est ainsi un groupement de dix unités. Mais, tous les nombres ne sont pas des multiples de dix, le groupement par dizaines laisse donc des unités non groupées. Celles-ci sont appelée *unités libres*.

Ces termes permettent de désigner facilement des grands nombres, mais ne permettent pas de les écrire de manière condensée et lisible.

La numération de position est alors introduite pour désigner les nombres (dits abusivement « à deux chiffres »). L'association entre les noms de nombres et les écritures décimales des nombres sera établie en remarquant que -ante ou –ente dans les noms de nombre signifie dizaine, ainsi *cinq(u)ante* veut dire *cinq dizaines, cinq(u)ante-trois* veut dire cinq dizaines et trois unités libres, etc.

Les noms de nombres se terminant par *–ze* sont formés d'un premier élément qui est une autre écriture des noms de nombres un, deux, trois, quatre, cinq, six. La formation de ces noms de nombres est étudiée, leur donnant du sens : *onze*, c'est *un et dix* ; *douze*, c'est *deux et dix*, etc. comme (à l'inversion près) *dix-sept* est *dix et sept*.

L'analyse comparative avec les langues étrangères parlées dans les foyers des élèves valorise les langues parlées par ces élèves et met en relief les régularités des langues, notamment l'apparition de désignations de dix et de dizaines.

Quelles traces écrites conserver ?

Conserver des traces des procédures mises en œuvre pour dénombrer. Celles-ci sont différentes selon que l'on dénombre des objets à manipuler ou des objets représentés sur une feuille de papier ou encore que l'on transforme une écriture additive longue pour l'écrire de manière conventionnelle à deux chiffres.

<u>En manipulant :</u> les objets sont groupés par paquets de dix, enfermés dans des boites, on dénombre les boites, les unités libres, on écrit le nombre d'objets de gauche à droite en commençant par les dizaines et en terminant par les unités libres.

<u>Sur un dessin :</u> les objets ne sont pas manipulables, mais nécessitent alors d'être repérés par paquets de dix, on peut compter jusqu'à dix objets en les marquant d'une couleur, puis d'une autre pour la dizaine suivante, etc. On peut aussi entourer des paquets de dix objets.

On conservera trace ces procédures et des associations entre les différentes représentations : voir lettre des labos.

Par le calcul : Les stratégies mobilisées pour effectuer des décompositions additives, pour montrer des égalités en décomposant et en recomposant sont à mobiliser le plus possible pour trouver les écritures conventionnelles des nombres.

ex : Trouve l'écriture à deux chiffres du nombre suivant : 7 + 8 + 13 + 5 + 25

Stratégie : former le plus de dizaines possibles

L'élève peut dans un premier temps décomposer 13 et 25 pour mettre en évidence des dizaines. On a

7 + 8 + 13 + 5 + 25 = 7 + 8 + 10 + 3 + 5 + 10 + 10 + 5

On peut remarquer que 7 + 3 = 10 et que 5 + 5 = 10 et écrire

7 + 8 + 13 + 5 + 25 = 10 + 8 + 10 + 10 + 10 + 10

7 + 8 + 13 + 5 + 25 = 58

Indications et commentaires à propos des missions

Missions	Compétences	Commentaires	Stratégie élève
3. Ecrire autrement le nombre dix	Décomposer additivement un nombre Observer Calculer Calculer mentalement	Il s'agit de trouver toutes les décompositions additives de dix. L'exercice peut être exécuté de manière quasi automatique. On diminue un nombre d'un, on augmente l'autre de un. Il y a donc équilibre. Remarque : cette automaticité potentielle sera remarquée On peut aussi demander aux élèves si on peut enlever deux à un nombre… en maintenant l'égalité. Oui, à condition d'ajouter deux à l'autre. Etc.	En manipulant : objets divers dont les doigts. En calculant (stratégie à encourager).
4. Ecrire des nombres avec les mots *dizaine, unité, libre*	Calculer Calculer mentalement Utiliser les mots dizaine, unité, unité libre pour désigner un nombre	Cette mission se situe juste avant les écritures du dix sous sa forme 10. Les écritures attendues ne sont donc pas cette forme mais : pour le deuxième membre de la première égalité $\underline{6+4} + \underline{3+7} + 2$, pour le deuxième membre de la deuxième égalité $\underline{2+8} + \underline{3+7} + 1$.	Par manipulation : prendre le nombre d'objets indiqués et forme des paquets de dix, groupe ces objets dans des boites, des pochettes, etc. Puis dénombrer les dizaines et les unités libres. Par calcul (stratégie à encourager). Repérer des compléments à dix comme indiqué dans l'exemple. Se servir des résultats de la mission 9. Marquer (souligner de la même couleur, surligner de la même couleurs les décompositions de dix qu'il effectue).
7. Ecrire un nombre avec deux chiffres (1)	Calculer Chercher	A partir de la ligne 11 du tableau, les calculs imposent de former des dizaines nouvelles. Les élèves qui éprouveraient des difficultés peuvent manipuler avec le matériel préconisé (pas de boites comportant exactement dix alvéoles à remplir). Mise en commun et explicitation des formations de dizaines nouvelles. La manipulation peut être montrée à tous les élèves. Calcul : montrer l'intérêt de la décomposition pour former des dizaines pour additionner par exemple 18 + 5 se calcule en décomposant 5 en 2 + 3 afin de former la dizaine 8 + 2. Trace écrite de la nécessité de former des dizaines nouvelles. La trace écrite comportera un exemple détaillé. Un tel exemple pourra figurer au mur de la classe. Mission à coller dans le *Cahier des NuméRas.*	Calculs et manipulations par formation de dizaines.

9. Ecrire un nombre avec deux chiffres (3)	Calculer Manipuler Décomposer additivement	Les opérations à effectuer ne sont cette fois que des soustractions. Le but est de permettre aux élèves de comprendre le mécanisme qui permet d'effectuer une soustraction (en manipulant, en ligne ou posée), à savoir qu'on ouvre une boite pour libérer dix unités. Par exemple : pour 31 – 8. On dispose de 3 boites de dix unités et une unité libre. Est-il possible de fournir 8 unités, bien sûr puisqu'il y en a trente dans les boites ! On ouvre une boite. On a alors deux boites de dix et onze unités libres. On donne 8 unités libres. Il reste 2 boites de dix unités et 3 unités libres. Le résultat est 23. On peut aussi s'appuyer sur des connaissances calculatoires et mettre en évidence ce que l'on enlève du premier terme sous forme d'une décomposition additive de celui-ci. Par exemple : 11 – 2 peut se voir comme 9 + 2 – 2, c'est 9 + 0, c'est 9. Note : l'auto correction montre en détail cette manière de faire.	Par le calcul successif : exemple pour calculer 11 – 2, de 11, j'enlève 1, il reste 10. De 10 j'enlève 1, il reste 9. D'où le résultat. En manipulant : on assimile la soustraction au fait de donner. On donne d'abord les boites de 10 demandées. Ex : 73 – 38. On donne déjà 3 boites. Il reste 4 boites et 3 unités libres. On ouvre une boite, et on donne 8 unités. Il reste 3 boites et 5 unités libres. D'où le résultat 35. Par addition d'un même nombre aux deux termes de la différence, si la classe a observé qu'une différence ne change pas si on ajoute ou retranche le même nombre à chacun de ses termes. Ex : 73 – 38… c'est pareil que 75 – 40 (ajout de 2 à chacun des termes). Le calcul est alors facile. Le résultat est 35.
10. Ecrire un nombre avec deux chiffres (4)	Calculer Décomposer additivement	Encourager la formation de dizaines, comme proposé dans l'auto-correction.	Manipuler, mais de préférence faire comme les NuméRas : former des dizaines.
11. Ecrire un nombre avec deux chiffres (5)	Changement de registre de représentation Associer désignations chiffrées et littérales de nombres	On pourra ou non cacher la liste des noms de nombres figurant au mur de la classe.	Repérer le début des noms de nombres pour associer la bonne dizaine.
14. Résoudre un problème additif (relation parties-tout)	Résoudre un problème additif Additivité de la mesure cardinale Justifier	Trouver le cardinal du tout. Une égalité qui le montre : 57 + 18 = 75.	Comprendre que la collection des arbres est formée de la réunion de celle des pommiers et de celle des poiriers et que le nombre total d'arbres est la somme des deux cardinaux. Calculer cette somme sans erreur. Manipuler pour trouver cette somme (boites de dix déjà formées, unités libres) : former une dizaine.
17. Résoudre un problème additif (relation parties-tout)	cf. 21 Comparer Justifier	Problème de relation parties-tout, sans mention de la nécessité de trouver le cardinal d'une partie, puis comparaison. Trace écrite : coller cette mission dans le *Cahier des NuméRas.* Conserver une trace écrite de la comparaison des deux nombres 36 et 27, voir ci-contre.	Comprendre qu'il doit trouver dans un premier temps le nombre de carottes, puis compare. Trouver le nombre de carottes : cf. 20. Comparer : Il y a 27 carottes et 36 tomates. Il y a plus de carottes que de tomates parce qu'il y a plus de dizaines de tomates que de dizaines de carottes.

21. Résoudre un problème	Résoudre un problème Représenter Calculer Justifier	Résolution d'un problème additif (en fait multiplicatif). Dans la mesure du possible, l'enseignant incitera les élèves à ne pas dessiner. Il mettra par contre du matériel à disposition y compris des boites pour former des dizaines et laissera manipuler les élèves qui le souhaitent. Une égalité qui le montre : 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 3 = 45 Trace écrite : coller cette mission dans le *Cahier des NuméRas* Trace écrite du calcul : conserver une trace écrite du calcul montré ci-contre. Difficulté : distinguer (sept boites de six œufs) et trois œufs de sept boites de (six œufs et trois œufs).	Dessin : à éviter Manipulation par représentation prendre sept fois six haricots et trois haricots. Former un maximum de paquets de dix, dénombre ces paquets et les unités libres et écrire le résultat : 45. Par le calcul (à encourager) : écrire le nombre total d'œufs : 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 3 puis transformer cette écriture en formant des dizaines 6 + 4 + 2 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 3 jusqu'à 10 + 10 + 10 + 10 + 5 puis 45.
23. Résoudre un problème de comparaison (relation partie-tout)	Résoudre un problème Représenter Comparer Justifier	Problème de relation parties-tout et de comparaison. L'intérêt de cette mission est double : recherche par essais et erreurs, justification par deux égalités. Deux égalités qui le montrent 6 + 8 = 14 et 6 + 2 = 8 Yohann a 8 billes, Luc a 6 billes. Trace écrite : coller cette mission dans le *Cahier des NuméRas* Trace écrite de la stratégie : J'essaye et si ça ne va pas, je recommence.	Manipulation et essais et erreurs : Se saisir de 14 haricots, forme deux tas jusqu'à obtenir la configuration demandée. Écrire les égalités qui justifient son choix.
24. Résoudre un problème de comparaison (relation partie-tout)	Résoudre un problème Représenter Comparer Justifier	Problème de relation parties-tout, de partage et de comparaison. Justification : en tout, il y a 17 + 25, soient 42 galettes. Najat donne 4 galettes à Anna ce qui fait 21 + 21 soient 42 galettes. Des égalités qui le montrent : 17 + 25 = 42 21 + 21 = 42 25 – 4 = 21.	Manipulation : Se saisir des haricots représentant les l'ensemble des galettes et forme deux tas équipotents. Comparer ensuite un de ces tas au tas initial de Najat qui va donner 4 galettes à Anna. Calculer le nombre total de galettes : 42 Remarquer que 21 + 21 = 42 et conclut en comparant un tas de 21 au tas de Najat qui doit donner 4 galettes à Anna.

FOIRE AUX QUESTIONS

1. N'est-ce pas trop compliqué d'étudier les noms de nombres, comme suggéré dans cette méthode ?

Les réalisations en classes montrent que les élèves non seulement sont capables de relever des parties de mots identiques dans des séries de mots (ou qui se prononcent de la même manière), mais de plus prennent plaisir à étudier les mots.

Ce travail, réalisé en langue française, peut être mis en valeur et les noms de nombres dévoiler leur formation en procédant d'abord à l'analyse de noms de nombres dans les langues étrangères parlées dans les familles des élèves. Certaines langues permettent de bien mettre en évidence les formations par addition du type *dix et un* pour *onze*, comme *dix-sept*, mot dans lequel le trait d'union vaut un *et* et le principe de formation par multiplication comme *cinquante*, qui signifie *cinq dizaine* ou *cinq fois dix*, formation que l'on retrouve dans *quatre-vingts*. La combinaison des deux principes se retrouve dans *quatre-vingt-seize* par exemple.

L'analyse des noms de nombres permet aux élèves de construire le sens de ce qu'ils désignent et facilite donc les associations entre désignations en langue naturelle et désignations chiffrées.

C'est en prenant comme objets d'enseignement certaines difficultés inhérentes à notre langue que l'on permet aux élèves de les surmonter.

2. N'est-il pas trop difficile d'étudier simultanément tous les nombres de dix à quatre-vingt-dix-neuf, au lieu de les étudier par tranches de 10 à 19, de 20 à 29, etc. et de s'arrêter à 69 ?

Cette question impose une première remarque préliminaire : tous les nombres naturels sont des objets de même nature. Il n'y a pas de nombre à un chiffre, de nombre à deux chiffres, de nombre à trois chiffres. Il n'y a pas de nombres de 10 à 19, etc. Il y d'un côté des nombres, de l'autre côté une infinité de systèmes permettant de les désigner. Parmi ces systèmes, la langue naturelle et les désignations chiffrées dans le système de numération de position décimale.

Ce qu'il convient d'étudier est le principe de la désignation chiffrée des nombres. Au regard de ce principe, toutes les désignations des nombres comportant deux chiffres, dans le système de numération décimal de position, sont formées de la même manière : le chiffre de gauche indique le nombre de dizaines, celui de droite indique le nombre d'unités libres (de 0 à 9).

C'est ce principe qui est enseigné dans cette méthode. Il n'y a donc pas lieu de procéder à des découpages comme ceux suggérés dans la question, découpages qui ne sont d'ailleurs fondés sur aucun élément théorique.

Pour ces mêmes raisons et la question 1, il n'y a pas lieu de « s'arrêter à 69 ».

3. Pourquoi utiliser des boites comme celles suggérées dans la méthode, au détriment de boites compartimentées comportant exactement dix alvéoles ?

Si les boites compartimentées permettent d'effectuer des vérifications incontestables, elles ne permettent pas à l'enseignant de s'assurer que les élèves ont conscience de former des dizaines puisque les élèves n'ont pas à dénombrer pour remplir les boites. L'action qui consiste à remplir chaque alvéole avec un et un seul élément dispense en effet de dénombrer. Il suffit de s'assurer que toutes les alvéoles sont remplies avant de fermer la boite.

Les boites, ou pochettes zippées, suggérées dans cette méthode fonctionnent sur le principe même du regroupement, celui qui prévaut dans la construction du système de numération de position et permet aux élèves de faire des erreurs que d'autres matériels ne permettent pas. Pour ces deux raisons, ce type de matériel semble plus adapté à la construction de la numération de position.

4. Vous n'évoquez ni les abaques ni les compteurs dans votre méthode. Pourquoi ?

La réponse rejoint la réponse à la question ci-dessus. Il nous apparait en effet essentiel de construire le sens de la numération de position avec un matériel qui fonctionne de la même manière, par regroupement. L'écriture à deux chiffres de la désignation d'un nombre repose sur la formation de paquets de dix, de dizaines.

Les abaques intègrent déjà cette convention puisqu'un jeton placé sur une pile du centre représente dix jetons placés sur la pile de droite. Ce matériel n'est pas congruent avec le principe même qui prévaut à la construction de la désignation chiffrée des nombres. Les abaques pourront ultérieurement s'avérer intéressantes pour le calcul.

Quant aux compteurs, ils ne sont qu'une représentation dont les écritures chiffrées de nombres se forment automatiquement, ils ne mettent pas en évidence le principe de groupements et le zéro prend un statut particulier, celui de désigner un vide.

Ni les abaques, ni les compteurs ne sont donc favorisés au départ dans cette méthode, car leurs fonctionnements sont trop éloignés du principe des groupements qui sont porteurs de sens pour les élèves et qui permettent de mieux appréhender des opérations comme, notamment, la soustraction.