La très grande fête continue

6

Multiplication
et problèmes liés relevant de la division
Multiples

OBJECTIFS ET CHOIX MATHEMATIQUES

Cette unité vise les objectifs suivants :

Du point de vue des notions

- Introduire la notion de multiplication, à partir du sens que ce mot induit : la répétition (sous entendu… en additionnant)
- introduire les notions de **multiple,** de **multiplication,** le verbe **multiplier,** le mot **produit** et son sens. Introduction de mots comme **double, triple, quadruple**, etc.
- analyser morphologiquement ces termes fréquents
- introduire le signe ×, pour ce qu'il est : un symbole choisi arbitrairement, mais reconnu par tous,
- constater la **commutativité** de la multiplication sur des exemples, admettre qu'elle est vraie pour tout couple de nombres entiers.

Du point de vue des compétences

- introduire des techniques de **calcul en ligne** relevant de la multiplication, mobiliser la **commutativité** de la multiplication pour simplifier des calculs,
- poursuivre les entrainements au calcul de sommes, de différences, dans l'objectif d'effectuer des calculs multiplicatifs en mobilisant, de fait, la notion de **distributivité** de la multiplication par rapport à l'addition, relation qui se traduit par :

  pour tout triplet de nombres entiers x, y et z, on a $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$

- **représenter** un produit de deux manières différentes au moins

  Première manière : **des tas**

  le produit 3×8, qui est égal au produit 8×3, peut se représenter sous la forme de trois tas de huit objets (qui traduit l'écriture 3×8) ou huit tas de trois objets (qui traduit l'écriture8×3)

  Deuxième manière : **des tableaux**

  le produit précédent peut se représenter sous la forme d'un tableau à trois colonnes et huit lignes pour la première écriture et huit colonnes et trois lignes pour la seconde. Une rotation du tableau de 90 degrés ou un changement de la direction d'observation du tableau (Sud➔Nord / Est➔ Ouest) montre alors de manière évidente l'égalité $3 \times 8 = 8 \times 3$, ce qui n'a rien d'évident avec la représentation en tas. Cette représentation est de plus pratique pour mettre en évidence la commutativité de la multiplication et la distributivité évoquée ci-dessus. Elle constitue un bon appui pour le calcul en ligne.

- **résoudre des problèmes** relevant de la multiplication
- **résoudre des problèmes** relevant de **la division**
- poursuivre les entrainements à la **résolution** de **problèmes ouverts**.

ACTIVITES EN MATHEMATIQUES

La multiplication

Cette notion n'est pas nouvelle, puisque les élèves effectuent des multiplications depuis le début de leur scolarité. Une multiplication n'est qu'une autre manière d'écrire une somme dont tous les termes sont égaux. Rien d'autre.

Il s'agit donc d'enseigner des écritures nouvelles. Le besoin d'écrire de manière plus condensée des grandes sommes s'explique par un gain de place à la fois sur le papier et en mémoire, la multiplication permet aussi de traduire de manière plus explicite, comme son nom l'indique, la répétition de quelque chose, donc la répétition (en mathématiques) de l'écriture d'un même nombre en l'additionnant avec le précédent.

Les mots utilisés en mathématiques apportent souvent un sens qu'il est bon d'interroger avant d'enseigner le concept visé. Etudions quelques mots spécifiques au champ de la multiplication.

Le mot **multiple,** formé de deux éléments : **multi-** (qui signifie plusieurs) et **–pl(e)-** (qui signifie fois) veut donc simplement dire *plusieurs fois.*

Le mot **multiple** est un hypéronyme de mots comme *triple, quadruple, sextuple,* etc. Le mot **triple**, est en quelque sorte une valeur particulière du mot « multiple », dans le cas où la valeur de multi- est trois. Ce mot est très explicite. Le mot **quadruple** l'est aussi pour peu qu'on le croise avec des mots comme *quadrupède, quadrimoteur,* etc.

La composition du mot **double** est moins limpide. Dans double, *dou-* traduit une racine indoeuropéenne signifiant *deux*, racine qui a par exemple donné *dou* (en persan), *two* (en anglais). L'élément de mot *–ble* est une autre forme (un allomorphe) de -pl(e)-. Le mot **simple**, *sim-* (un seul), est aussi un hyponyme du mot *multiple.*

Le verbe **multiplier**, veut donc dire réaliser (-*ier*) plusieurs (*multi*-) fois (-*pl*-).

Les écritures mathématiques utilisent un nouveau signe, arbitraire, comme tous les signes : le signe × pour traduire le mot *fois*. Les écritures 3 × 8 -dans le registre des écritures mathématiques- (qui se lit *trois fois huit*) et « *trois fois huit* », désignation en langue naturelle sont congruentes[1]. Ce qui n'est pas le cas en utilisant le mot *multiplié*. Car l'écriture mathématique 3 × 8 doit se lire *huit multiplié par trois*, même si, du fait de la commutativité, elle est égale à 8 × 3, qui se lit *trois multiplié par huit.*

Le mot **produit,** qui est étymologiquement un terme générique pouvant s'appliquer à toutes les opérations puisqu'il indique le résultat d'un processus: ce qui est poussé devant comme dans une chaine de production[2] est réservé par les mathématiciens au cadre de la multiplication. Il désigne généralement le résultat sous forme canonique d'une multiplication, par exemple 24 autant pour 3 × 8, 8 × 3 ou 2 × 12 . Ce terme sera utilisé ultérieurement.

Le fondement de la multiplication étant la réitération d'une addition, cette notion ne nécessite pas une situation problème pour être enseignée (elle pourrait l'être par l'impossibilité de

[1] Congruence : con- (avec, ensemble), -gr- (marcher, aller, que l'on trouve dans progression, régression, etc. -ence (suffixe nominal). Sont congruentes deux expressions qui « vont bien ensemble ». Cela est notamment le cas quand elles se correspondent unité par unité (3 et trois, 8 et huit, × et fois), et que ces unités figurent dans le même ordre dans l'écriture des deux expressions.

[2] (pro- : devant ; -duit : pousser, faire aller, guider, allomorphe de du(ct), que l'on retrouve dans conduction, aqueduc, duce, induction, éducation, etc. dans une très grande famille de mot).

retenir des trop longues écritures additives pour passer des commandes, mais ce n'est pas ce point de vue que nous avons adopté dans cette unité).

Aussi, nous avons pris le parti d'enseigner la multiplication par une situation de répétition d'une action. Les NuméRas par les contraintes,

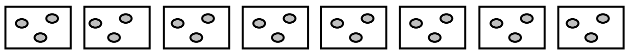
- qui sont imposées aux personnages (chaque NuméRa ne sait compter que jusqu'au nombre inscrit sur son dossard et ne peut transporter qu'exactement ce nombre d'objets),
- qui sont imposées par la situation fictionnelle au moment de l'introduction de la multiplication (absence des autres NuméRas à numéro et de TransporteRa ainsi que de sa charrette),

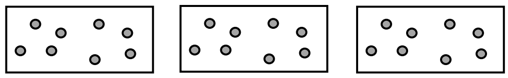
vont chercher à exprimer un nombre de la manière la plus simple possible en n'effectuant chacun qu'un voyage chez VendRa. Parmi les NuméRas à numéro, seuls RaHuit et RaTrois sont présents. La charrette de TransporteRa est occupée ailleurs et il s'agit (sans que ce nombre ne soit mentionné, de commander 24 objets, une fois par RaTrois, une fois par RaHuit). Le mot *fois* est introduit à ce moment, ainsi que la découverte d'un nouveau signe.

Représenter la multiplication, le multiple

Les expressions *huit fois trois* et *trois fois huit* se représentent dans le registre des écritures mathématiques respectivement par 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 et par 8 + 8 + 8.

Dans un registre figural analogique,

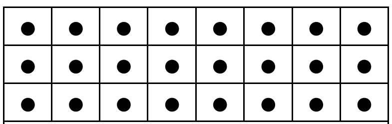
l'expression *huit fois trois* se représente par 

l'expression *trois fois huit par* 

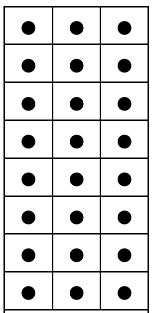
Cette représentation, si elle met bien en évidence la répétition -le mot « fois »-, ne permet pas de répondre à la question de la commutativité. Il serait possible d'établir les correspondances sagittales entre ces deux représentations pour atteindre le résultat attendu, mais ce serait fastidieux et peu lisible.

Il est possible d'organiser autrement les représentations. Les tableaux constituent d'autres outils pour organiser les données afin de mieux les visualiser.

Pour ce faire, il suffit d'aligner les points de chacun des tas « verticalement » et « horizontalement ». Ce qui donne les deux représentations suivantes :



Représentation de ***huit fois trois***



Représentation de ***trois fois huit***

Mettre en évidence la commutativité de la multiplication

L'observation, par changement de point de vue de l'observateur (tourner l'axe de vue d'un quart de tour), montre que ces deux représentations sont identiques et qu'elles contiennent donc le même nombre de points.

On peut en effet dire que la première représentation vue « Sud-Nord » est constituée de huit colonnes de trois objets et, après un quart de tour de la deuxième, que cette dernière est également constituée de huit colonnes de trois objets.

On établit ainsi par les représentations (et ou par une reformulation en langue française) que les deux représentations représentent le même nombre de points et qu'en conclusion on a l'égalité : *huit fois trois* égale *trois fois huit*

Les expressions sont longues à écrire. L'histoire des NuméRas introduit le signe ×, en montrant son caractère conventionnel.

On dispose alors d'une traduction de l'expression *huit fois trois* en langue naturelle dans le registre des écritures symboliques mathématiques.

On obtient les égalités suivantes :

$8 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ (égalité définitoire)

$3 \times 8 = 8 + 8 + 8$ (égalité définitoire)

Et l'égalité $8 \times 3 = 3 \times 8$, qui traduit une propriété essentielle de la multiplication : la **commutativité**, puisqu'elle se généralise à tout couple d'entiers naturels a et b : $a \times b = b \times a$. Cette propriété est induite par les manipulations et généralisée de manière pragmatique.

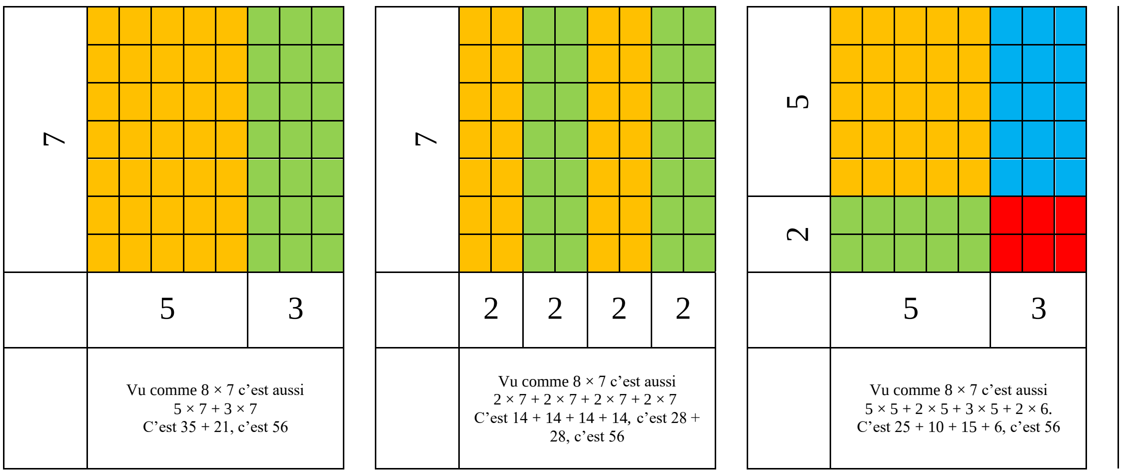
Cette propriété, que ne montre pas l'organisation en « tas », mais que montre bien l'organisation en tableaux est un des points d'appuis essentiels pour les calculs multiplicatifs, car elle permet de les représenter et de les simplifier.

Il est en effet plus facile de calculer 3×17, qui ne nécessite que deux additions, que 17×3 qui en nécessite bien davantage.

Visualiser la distributivité de la multiplication par rapport l'addition

La représentation d'un produit sous forme de tableau permet de visualiser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, un des deux points d'appui essentiels pour les calculs multiplicatifs.

Soit, par exemple, à calculer 8×7. Dessinons un quadrillage de huit colonnes et sept lignes.



Les manières de représenter ainsi des calculs à effectuer sont nombreuses et il conviendra de laisser aux élèves le soin de représenter comme ils le souhaitent les calculs multiplicatifs dans des tableaux (sous réserve de présenter des régularités permettant le calcul). Chacun peut ainsi prendre appui sur ce qu'il connait, puis, connaissant de plus en plus de résultats multiplicatifs, les élèves effectueront des distributions de plus en plus efficaces.

Les contraintes des NuméRas à numéro permettent de contraindre les élèves à effectuer certains types de distributions et fournissent à l'enseignant un outil de différenciation.

Calculer

Il est important de faire effectuer le plus de calculs possibles aux élèves, en prenant au début appui sur des quadrillages tels que ceux montrés ci-dessus.

Les résultats des calculs de deux entiers a et b où a et b appartiennent à l'ensemble {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} seront notés au fur et à mesure sur des affiches ou dans un tableau à double entrée. Les élèves devront les maitriser, soit par une grande pratique du calcul, soit, si cela s'avère nécessaire, par l'apprentissage de tables ou de parties de tables de multiplication.

Le cas particulier de la multiplication par 0 sera traité en indiquant par exemple que si quelqu'un va zéro fois chez un commerçant chercher cinq croissants, il ne rapporte rien, que le résultat est donc 0 croissant ($0 \times 5 = 0$). Si quelqu'un va 5 fois chez le boulanger et qu'il achète chaque fois 0 croissant, en tout, il achète 0 croissant ($5 \times 0 = 0$). La généralisation pragmatique fournit le résultat : $0 \times 5 = 0$, puis, pour tout nombre entier a $0 \times a = 0$ et $a \times 0 = 0$.

Il est possible de mettre en scène en donnant un NuméRa, par exemple RaCinq à un élève et lui demander d'aller deux fois chez VendRa chercher cinq croissants, puis une fois chercher cinq croissants. A son retour, on note le nombre de croissants apportés : 2×5 (soit dix), puis 1×5 (soit cinq). On lui demande enfin d'aller zéro fois chez VendRa chercher cinq croissants. L'élève reste sur place. On lui demande combien de croissants il vient d'apporter : 0×5. On constate le résultat : 0. On note cette nouvelle relation : $0 \times 5 = 0$. On peut recommencer avec d'autres nombres… pour arriver toujours au même constat : « Quand on multiplie un nombre par zéro, on obtient zéro[3] , quand on multiplie 0 par nombre, on obtient aussi 0 ».

Traces écrites :

On réalise des affiches qui consignent tous les résultats que l'on rencontre en effectuant des multiplications, affiches qui seront laissées à la disposition des élèves tant que nécessaire. Elles peuvent être représentées dans des mémos.

Ce tableau pourra être partiellement vide afin d'obliger les élèves à utiliser la commutativité de la multiplication pour trouver le résultat d'un calcul. Les résultats de ce tableau devront être petit à petit maitrisés par les élèves.

Un autre point de vue sur la multiplication

Résoudre un problème comme

« Héloïse veut former des cadeaux composés chacun d'un livre et d'une tablette de chocolat. Elle dispose de trois titres de livres et de quatre chocolats différents (chocolat au lait, chocolat noir, chocolat à la noisette et chocolat à l'orange). Combien de cadeaux différents peut-elle former ? »

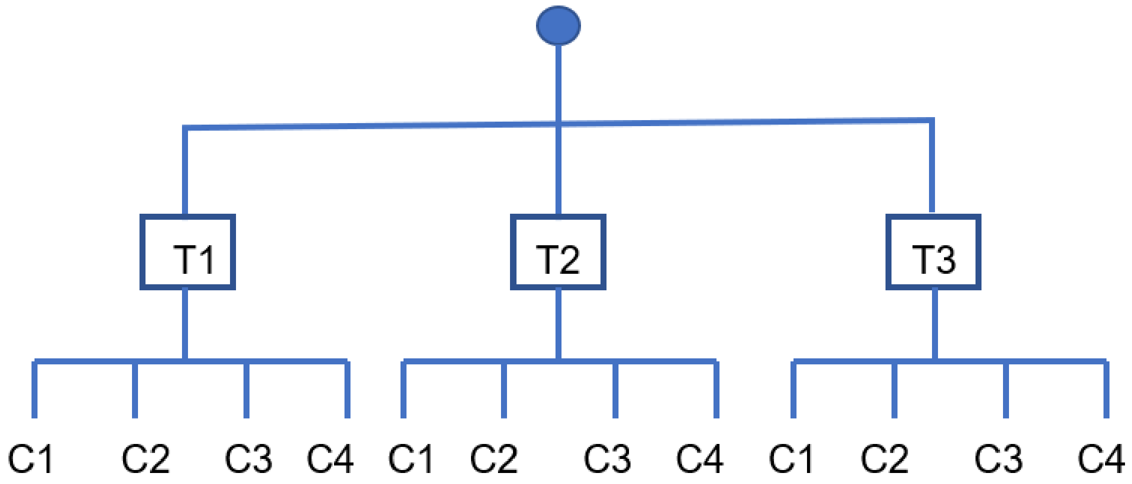
relève aussi de la multiplication alors qu'il n'y a pas itération d'additions.

Comment résoudre un tel problème ? Pourquoi relève-t-il de la multiplication ?

[3] On dit que zéro est un élément **absorbant** (il absorbe les autres nombres par la multiplication).

Première manière : former des « arbres »

Appelons T1, T2 et T3 les titres des trois livres. Appelons C1, C2, C3, C4, les tablettes de chocolats différents. Construisons comme suit l'arbre des possibles :



Cet arbre construit tous les cadeaux possibles : associer la tablette T1 soit avec le chocolat C1, soit avec le chocolat C2, soit avec le chocolat C3, soit avec le chocolat C4, de même pour les titres T2 et T3.

Ce qui ne se présentait pas comme une répétition en est une, on répète C1, C2, C3, C4, autant de fois qu'il y a de choix de titres. Soit trois fois. Le nombre de cadeaux possibles est donc 3×4. La répétition, a priori inexistante est en fait mise en relief.

Deuxième manière : produit cartésien de deux ensembles

Nous reprenons les notations précédentes et considérons les deux ensembles T et C définis exhaustivement par

T = {T1, T2, T3} et C = { C1, C2, C3, C4}.

ce que l'on appelle le produit cartésien de ces deux ensembles est l'ensemble de tous les couples (a, b) que l'on peut former, a appartenant à T et b appartenant) C.

Ce sont les couples (T1, C1), (T1, C2), (T1, C3), (T1, C4), idem avec T2 et T3. On retrouve exactement les désignations des chemins T1C1, T2C2, ci-dessus.

Les produits cartésiens se représentent comme une table de multiplication :

	C1	C2	C3	C4
T1	(T1, C1)	(T1, C2)	(T1, C3)	(T1, C4)
T2	(T2, C1)	(T2, C2)	(T2, C3)	(T2, C4)
T3	(T3, C1)	(T3, C2)	(T3, C3)	(T3, C4)

On retrouve la présentation rectangulaire que l'on a définie pour représenter les produits en début de ces commentaires.

C'est parce que ces représentations sont équivalentes à la disposition sous forme de rectangle que le problème d'Héloïse, comme bien d'autres relèvent de la multiplication. On voit qu'il est important de représenter les situations rencontrées pour reconnaitre un problème relevant de la multiplication. Tous ces problèmes, peuvent se ramener à un problème de répétition (chacune des branches de l'arbre est *mutatis mutandis* la répétition de la première, chaque ligne du tableau du produit cartésien est *mutatis mutandis* la répétition de la première ligne.

La multiplication sert à exprimer le cardinal d'un produit cartésien de deux ensembles (association d'un pull avec un pantalon, d'un wagon avec une locomotive, etc.).

Nous avons privilégié l'approche par la répétition, plus simple d'accès, associée à la représentation rectangulaire, mais il convient de ne pas faire d'impasse sur des autres représentations possibles, comme les arbres ou le produit cartésien qui peuvent toujours se ramener à cette configuration rectangulaire.

Une propriété fondamentale des produits cartésiens de deux ensembles ayant un nombre fini d'éléments est :

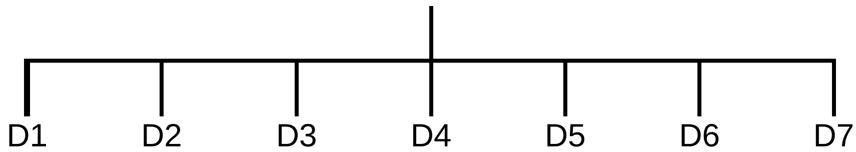
Le cardinal (le nombre d'éléments) du produit cartésien de deux ensembles finis est égal au produit des cardinaux de ces deux ensembles.

Cette propriété relie expressément produit cartésien de deux ensemble et multiplication.

Limites des arbres et des produits cartésiens

Imaginons qu'Héloïse veuille associer un de ses dessins aux cadeaux. Elle dispose de sept dessins différents.

A chacune des branches de l'arbre précédent, il faut représenter « un peigne » comme le suivant, dans lequel les dessins sont désignés par : D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7 ;



Une telle représentation montre que ce peigne est représenté douze fois. Le nombre de cadeaux différents possibles comportant un livre, une tablette de chocolat et un dessin est donc douze fois le nombre de cadeaux comportant un livre et une tablette de chocolat.

Ce nombre de cadeaux est donc $7 \times (4 \times 3)$, soit 84.

Il est possible d'avoir en tête ce genre de représentation, mais elle rencontre rapidement ses limites sur le papier. Elle permet cependant de résoudre le problème d'Héloïse, problème qui relève de la multiplication, encore une fois, articulé autour du mot *fois*.

Quant au produit cartésien, on est amené à considérer le produit de trois ensembles T, C et D (ensemble des dessins).

Ce produit cartésien ne peut plus se représenter dans le plan, mais dans l'espace, avec la même base rectangulaire, mais une superposition de sept couches identiques à la base. Il comporte $7 \times 4 \times 3$ éléments. On peut imaginer des petits cubes.

Ce produit cartésien devient difficile à représenter, mais cela reste possible dans l'espace.

Et si Héloïse souhaitait ajouter une fleur séchée à son cadeau, sachant qu'elle dispose de cinq sortes de fleurs séchées ?

On pourrait toujours, représenter les chemins, sur une grande feuille, par contre, on ne pourrait plus représenter, même dans l'espace, le produit cartésien $T \times C \times D \times F$ puis qu'il se situe dans un espace à quatre dimensions.

On peut l'imaginer et résoudre ce type de problème, non plus en réalisant graphiquement les représentations, mais en prolongeant celles que l'on connait. Dans tous les cas, le vocable *fois* permet d'exprimer le résultat parce qu'il y a répétition d'un motif (peigne, ou couche).

D'où l'importance de travailler à partir de ce mot *fois*.

Activités mathématiques. Quelles manipulations, quelles représentations ?

1. Mise en place, utiliser le mot *fois*

La mise en place de la situation se fait en imitant ce que font les NuméRas : commander en jouant le rôle de certains NuméRas le nombre de… qui convient. On pourra représenter des tables sur une grande affiche posée au sol, et demander de commander tant par table (tant de verres, tant de fourchettes, etc.). On pourra représenter des chaises et commander autant de… qu'il y a d'invités. On note le nombre de voyages que font chacun des élèves (NuméRas) pour obtenir chez VendRa le nombre exact d'objets demandés. On veillera à faire apparaitre l'agacement de VendRa qui demande de faire le moins de commandes possibles.

2. Représentations des objets commandés, configurations des produits

Les objets à commander sont représentés dans le monde matériel par des haricots, des cailloux, dans le mode écrit par des ronds, des croix, des points, etc.

Première situation : disposer les objets en tas, par exemple trois tas de huit haricots pour la commande réalisée par RaHuit et huit tas de trois haricots pour la commande que veut réaliser RaTrois (il sera aidé par un autre NuméRa dont le numéro est supérieur à huit).

Demander aux élèves si le nombre de haricots est le même dans les deux répartitions. Expliciter.

Deuxième situation : de retour de la boutique de VendRa, les élèves sont invités à disposer en lignes les haricots qu'ils rapportent. On verra alors se former deux tableaux l'un comportant trois lignes, l'autre huit. On en gardera une trace écrite réalisée par étapes successives bien notées sur l'affiche - première commande, deuxième commande-, etc.). L'observation de ces tableaux par changement de perspective met en relief l'égalité. « C'est la même chose, mais tournée ». D'où la conclusion portant sur la commutativité de la multiplication.

Troisième situation : Former des groupes de deux élèves. L'un est par exemple RaSept, l'autre RaHuit. L'un et l'autre effectuent un certain nombre de voyages et rapportent des haricots. On obtient d'un côté les tas de haricots cherchés par RaSept, de l'autre, ceux apportés par RaHuit. Demander aux élèves si les deux NuméRas ont apporté le même nombre de haricots. Comparer les tas en tenant compte des contraintes de chaque NuméRa (faire des colonnes de sept haricots pour le tas de RaSept et des colonnes de huit haricots pour celui de RaHuit). Demander comment faire pour qu'il y ait autant de haricots apportés par chacun des NuméRas (RaHuit effectue par exemple sept voyages et RaSept en effectue huit).

Le contrôle de l'égalité se fait visuellement par l'observation des tableaux. Conserver trace écrite de ces situations fondamentales.

Exemple de cas où il n'y a **pas égalité** : RaSept est allé quatre fois chercher sept objets. RaHuit a effectué cinq voyages (et à chaque voyage il a rapporté huit objets). La différenciation se fait par le choix de la taille des tas (petits pour certains élèves, plus gros pour les autres, mais l'exercice mathématique reste le même).

Exemple de cas où il y a **égalité** : RaHuit va sept fois chez VendRa et RaSept y va huit fois.

Représenter ces situations dans le Cahier des NuméRas. Veiller, au début à représenter les rectangles de la page 9 en indiquant au fur et à mesure le nombre de voyages et les quantités. Ces tableaux se construisent au fur et à mesure que les élèves effectuent les voyages.

3. Représentations liées aux activités de partage (ne relevant pas nécessairement de la division euclidienne)

Rappel préliminaire : l'écriture 4 + 4 + 4 + 7 peut traduire un partage. Il ne s'agit pas dans ce cas d'un partage égal car à l'évidence, trois personnes reçoivent 4 objets chacune et la quatrième en reçoit 7. Ce partage n'est pas dit « égal » pour les quatre personnes. Il se traduit par l'écriture 3 × 4 + 7 et par l'égalité : 19 = 3 × 4 + 7. On peut parler à son propos de division, mais pas de division euclidienne.

La division euclidienne traduit le fait que chacun reçoit la plus grande part possible et que toutes les parts sont égales. Le partage égal et maximal de 19 en quatre se traduit par l'égalité 19 = 4 × 4 + 3. Chacun reçoit 4. Il reste 3.

Cette activité est réalisée un grand nombre de fois. Il s'agit de décomposer un nombre multiplicativement, ce qui peut se faire de très nombreuses manières diférentes.

La fiction contextualise cette situation lorsqu'il s'agit (partie 5 du chapitre) de sauver 17 RaZeds avec RaCinq et RaDeux (les NuméRas peuvent transporter n objets mais aussi n paquets de m objets, ce qui permet de résoudre ces situations.

Exemple : 17 = 5 × 3 + 2 (RaCinq commande 5 lots de trois boites de KisKas et RaDeux qui l'accompagne commande deux boites de KisKas).

D'autres solutions sont possibles, comme celle traduite par l'écriture 17 = 8 × 2 + 1. RaHuit commande huit lots de deux boites de KisKas et RaUn qui l'accompagne en commande une, etc.

Ces situations, motivantes pour les élèves car il s'agit de sauver les RaZeds, leur permettent de pratiquer de nombreuses décompositions des nombres en utilisant la multiplication et l'addition. Tout nombre entier naturel peut se décomposer ainsi.

Première situation : Dans cette première étape, le cardinal des tas n'est pas un nombre premier. Ce qui se traduit par le fait qu'un seul et même NuméRa peut réussir la tâche en se rendant un certain nombre de fois chez VendRa ou en y allant une seule fois en commandant des lots ou des paquets de boites de KisKas.

Ces situations peuvent être mises en scènes par les enfants. Pour ce faire, se munir de cailloux qui représentent les NuméRas prisonniers d'Os-Sombre et des figurines des NuméRas.

Disposer un tas de haricots devant chaque groupe d'élèves. Une différenciation peut être effectuée par le choix du nombre de haricots de chaque tas.

Demander aux élèves quels sont les NuméRas qui peuvent aller passer commande chez VendRa. Faire préciser le nombre de voyages qu'ils devront faire. Réaliser effectivement ces commandes pour les groupes où cela semble nécessaire.

Pour réaliser cette tâche, les élèves doivent faire des paquets de même taille avec l'ensemble de tous les cailloux.

Exemple : 12 cailloux

- Première solution : RaUn va 12 fois chez VendRa chercher à chaque fois une boite
- Deuxième solution : RaDeux va 6 fois chez VendRa car 6 × 2 = 12. Il pourrait aussi y aller une fois seulement en demandant deux lots de six boites car 2 × 6 = 12.
- Troisième solution : RaTrois va quatre fois chez VendRa car 4 × 3 = 12 ou bien il n'y va qu'une fois et commande 3 lots de quatre boites de KisKas car 3 × 4 = 12.

- Quatrième solution : RaQuatre va trois fois chez VendRa car 3 × 4 = 12 ou bien il n'y va qu'une fois et commande 4 lots de trois boites de KisKas car 4 × 3 = 12.
- Cinquième solution : RaSix va deux fois chez Vendra car 2 × 6 = 12 ou bien il n'y va qu'une fois et commande six lots de deux boites de KisKas car 6 × 2 = 12.
- Sixième solution : RaDouze va une fois chez Vendra car 1 × 12 = 12.

Faire représenter dans le Cahier des NuméRas les différentes dispositions en tas et en tableaux des différentes solutions.

Note : les écritures 3 × 4 et 4 × 3 doivent être distinguées dans le sens où la première peut traduire le fait que RaQuatre se rend trois fois chez VendRa et que la deuxième traduit le fait que RaTrois se rend quatre fois chez VendRa. Ces deux écritures n'ont **pas la même signification** et pourtant, elles **sont égales** car elles désignent aussi toutes deux le même nombre encore désigné par 12, elles ont de ce fait le **même sens**.

La note qui précède montre qu'il faut attacher la plus grande attention à la construction de la signification d'une écriture.

Deuxième situation, sans contrainte : Dans cette deuxième situation, le cardinal des tas est un nombre premier (7, 11, 13, 17, 23, etc).

Disposer un tas de haricots devant chaque groupe d'élèves. Une différenciation peut être effectuée par le choix du nombre de haricots de chaque tas. Donner 7 cailloux à certains élèves et 17 ou 37 à d'autres. La tâche est la même.

Demander quels sont les NuméRas qui peuvent aller passer commande des objets représentés à VendRa.

Exemple :

Donner un tas de 13 haricots à un groupe d'élèves. Seules solutions : RaUn qui peut aller passer commande treize fois et RaTreize qui peut y aller une fois.

Deuxième situation, avec contrainte : Dans cette deuxième situation, le cardinal des tas est un nombre premier, mais RaUn et le NuméRa correspondant au cardinal du tas de haricots sont absents. Il faut pourtant aller commander les objets à VendRa. La gravité de la situation peut être réinitialisée en disant qu'il s'agit de sauver les RaZeds ou d'un entrainement à les sauver.

Exemple :

Donner un tas de 13 (ou 29, ou 31, ou…) haricots à un groupe d'élèves. La situation semble impossible, quelles que soient les manipulations pour former un rectangle ou des tas équipotents, c'est un échec. Il faut pourtant sauver les RaZeds.

Première idée : enlever un haricot du tas. Il y a maintenant un paquet de 12 haricots (si 13 haricots au départ), on est ramené au problème détaillé précédemment, mais il faudrait la présence de RaUn pour le haricot qui manque. Ce n'est donc pas possible. Echec. La situation devient dramatique.

Deuxième idée : enlever deux haricots du tas. Autre échec. Il devient urgent de trouver une solution.

Troisième idée : enlever trois haricots du tas. Il y a maintenant un paquet de 10 haricots et un paquet de trois haricots. La situation semble pouvoir se résoudre. RaDeux peut y aller en effectuant cinq voyages, RaTrois l'accompagne pour un voyage. RaCinq peut y aller en effectuant deux voyages, RaTrois l'accompagne en effectuant un voyage.

Mais ce grand nombre de voyages peut déplaire à VendRa. RaCinq peut aller chez VendRa accompagné de RaTrois. La commande est alors : « Donne-nous cinq lots de deux boites de KisKas et trois boites » ce qui se traduit par l'égalité 5 × 2 + 3 = 13.

Bien d'autres solutions sont possibles :

13 = 5 × 2 + 1 × 3 (RaDeux effectue cinq voyages, RaTrois un voyage). L'égalité peut aussi s'écrire 13 = 5 × 2 + 3, mais le 1 × montre bien que RaTrois effectue un voyage.

ou

13 = 2 × 5 + 1 × 3 (RaCinq effectue deux voyages, RaTrois un voyage)

Ces écritures permettent de résoudre bien des problèmes relevant des partages et sous certaines conditions, de la division euclidienne. De tels problèmes peuvent être proposés aux élèves les plus avancés à titre de différentiation.

Tous les nombres peuvent désormais être décomposés en mobilisant une écriture relevant de la division euclidienne. La division euclidienne vient de faire son apparition voilée, ouvrant la porte à de nombreux problèmes de partages en parts égales et maximales.

4. Effectuer des multiplications

Le principe de base du calcul des produits est le calcul par additions successives.

Les produits « simples » sont proposés aux élèves à de très nombreuses occasions (calcul mental, supermarché des calculs, etc.). Afin de permettre aux élèves plus à l'aise avec les quadrillages, on mettra toujours à disposition des élèves du papier quadrillé (5 mm sur 5 mm) afin qu'ils puissent représenter par eux-mêmes, sous forme de tableau rectangulaire, le produit à effectuer.

L'enseignant veillera à ce que les résultats fondamentaux soient bien maitrisés des élèves. On pourra penser tout particulièrement aux doubles, aux triples, aux quadruples, aux quintuples (après avoir travaillé en langue la formation de ces mots), etc. Chaque enseignant limitera l'empan des connaissances fondamentales de chacun de ses élèves en fonction de ses capacités de l'instant, mais veillera, tout au long de l'année à élargir cet empan pour chacun.

Exemples :

2 × 3 = 3 + 3 = 6 ; 4 × 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 10 + 10 = 20.

Mais le calcul d'un produit par répétition d'une addition trouve rapidement ses limites, par exemple pour le calcul de 23 × 2.

Ce mode de calcul est alors complété par la **commutativité** de la multiplication (pour tout a tout b : a × b = b × a).

Exemples :

23 × 2 = 2 × 23 = 23 + 23 = 46 ; 24 × 3 = 3 × 24 = 24 + 24 + 24 = … = 72.

On peut composer de la même manière les tableaux. Les élèves voient ainsi la représentation se construire progressivement et conservent une trace de cette construction.

Indications et commentaires à propos des missions

Précisions relatives aux capacités de portage des NuméRas à numéros : chaque NuméRa à numéro ne peut transporter que le nombre d'objets inscrit sur son dossard, pas un de plus, pas un de moins.

RaTrois peut par exemple porter trois pommes, ni quatre, ni deux. Par contre, il peut porter trois paquets de gâteaux contenant chacun huit petits gâteaux, trois sacs de pommes contenant chacun quatre pommes, trois sacs d'oranges contenant chacun huit oranges, etc.

Cette condition est essentielle pour comprendre ce qu'il se passe dans les missions et dans l'histoire.

Missions	Compétences	Commentaires	Stratégie élève
4 Problème relevant de la division	Résoudre un problème relevant de la division.	Il s'agit de RaSept car 4 × 7 = 28 (égalité qui le montre). Compléter la table p 96.	Procéder par manipulations : prendre un tas de 15 ou de 28 objets, le répartir en trois paquets équipotents. Procéder par le calcul par essais et erreurs. Chercher dans la table de multiplication si la valeur y figure déjà.
5 et 6 Problème relevant de la division, problème ouvert.	Transformer une représentation textuelle en représentation en écriture mathématique (changement de registre). Décomposer selon les contraintes de la division euclidienne.	Problème ouvert car il faut trouver toutes les décompositions multiplicatives de 21. 5. Il peut s'agit de RaUn qui est allé 21 fois chez VendRa, ou de RaVingt-et-un qui est allé une fois, ou de RaSept qui y est allé sept fois. 6. Idem, RaUn, RaTrente-cinq ou RaCinq. Compléter la table p 96.	Cf. ci-dessus.
12. Représentation de la multiplication **Consolidation**	Articuler un registre figural, le registre des écritures symboliques mathématiques et le registre de la langue naturelle.	Les écritures inversées ne sont pas acceptées, même si le résultat est le même. Le nombre de boites rapportées par RaTrois est 3 × 7, soit 21. Les égalités que l'on peut écrire : 3 × 7 = 21. 7 × 3 = 21. 3 × 7 = 7 × 3. Si certains élèves placent les « paquets » de points n'importe où dans le quadrillage, leur réponse à la question est correcte. On le leur dit. Mais, on leur montre aussi qu'il s'agit, pour mieux voir, d'organiser les points par colonnes. Les points s'organisent en trois colonnes de sept points. Chaque colonne correspond à « un sac ».	Se référer à l'histoire, au cahier. Se souvenir du sens des écritures multiplicatives. Ecrire 3 × 7.

15. Représentation de la multiplication	Articuler un registre figural, le registre des écritures symboliques mathématiques et le registre de la langue naturelle.	5 + 5 + 5 Trois fois cinq ronds 3 × 5 et 3 × 5 = 15 Les écritures inversées ne sont pas acceptées, même si le résultat est le même.	Se remémorer la définition de la multiplication et ses écritures.
17. Résoudre un problème multiplicatif à deux étapes (guidé).	Articuler des registres. Calculer une somme réitérée. Ecrire une somme sous forme de produit.	Le quadrillage ne sert pas, *a priori* à effectuer le calcul dont le résultat est attendu dans le quatrième point. Il peut cependant permettre à certains élèves de trouver le résultat. A ceux qui seraient tentés de dénombrer un à un, demander de colorier de différentes couleurs des « paquets de dix ». Dépense : 42 €.	Mobiliser les connaissances de la définition de la multiplication. Calculer. Ecrire les résultats dans des phrases syntaxiquement et orthographiquement correctes.

Astuce pour calculer		La commutativité permet de diminuer le nombre d'additions à effectuer lors du calcul d'un produit. A faire exprimer par les élèves.	
20. Problème multiplicatif, conversion de registre	Représenter un produit sous forme de tableau.		Se remémorer la définition de la multiplication et utiliser la commutativité pour mettre en œuvre l'astuce.
22 Calculs multiplicatifs	Savoir calculer.	Les calculs peuvent être réalisés par additions réitérées ou par décomposition par exemple 7 × 8 c'est 5 × 8 + 2 × 8 Ces calculs, une fois corrigés viendront compléter, au mur, la table de multiplication sous forme de tableau.	Calculer en additionnant.
Astuce pour multiplier par 1 ou 0		Mettre en scène ce qui est proposé en fin de cartouche pour faire émerger le sens de la multiplication par 0 ou par 1 par les élèves.	Se souvenir du sens de la multiplication pour les facteurs 1 et 0.
23. Calculs multiplicatifs, égalités lacunaires	Chercher par essais et erreurs. Calculer multiplicativement.	On pourra aussi laisser les élèves utiliser la table de multiplication qui se lit alors différemment (on parcourt toute une colonne ou toute une ligne pour trouver le nombre cherché, par exemple la colonne du 8 pour trouver 56 et afficher le résultat 7.)	Calculer par essais et erreurs pour les autres.
28. Problème relevant de la division	Chercher Représenter Communiquer	Exiger des phrases réponses correctes.	Se représenter la situation. Stratégie mobilisant des écritures additives et par essais et erreurs possible : essayer deux paquets, ce qui donne 14 yaourts, puis trois paquets, etc. jusqu'à trouver le résultat. Stratégie mobilisant une égalité multiplicative lacunaire : 7 × ___ = 42 puis essais et erreurs. Recherche dans la table de multiplication. Manipulation : prendre 42 cailloux et les répartir également en 7 tas.
30. Problème multiplicatif à plusieurs opérations	Comprendre un énoncé Chercher Représenter Communiquer Comprendre la monnaie	Des expressions usuelles comme celle figurant dans l'énoncé : « sept paquets de pâtes à 2 € chacun et quatre boites de sauce tomate à 4 €. » ne sont peut-être pas comprises des élèves. Il est nécessaire de les travailler. « sept paquets de pâtes à 2 € chacun» veut dire : « Chaque paquet de pâtes coûte 2 € ». « quatre boites de sauce tomate à 4 € » veut dire que chaque boite de sauce coute 4 € et pas que l'ensemble des boites coûte 4 €. Exiger des phrases réponses correctes. Prévoir la représentation d'un vrai ticket de caisse.	Se représenter la situation. Comprendre des expressions usuelles utilisées pour exprimer des valeurs marchandes. Transposer des situations familières ave des nombres (ou d'autres unités) à la monnaie (l'euro). L'élève est guidé par l'énoncé.

36. Calculs composites comportant un produit et une somme.	Comprendre des écritures symboliques Calculer	On demander aux élèves de raconter comment les NuméRas ont gagné contre Os-Sombre. Dire que les nombres sont les nombres de boites de KisKas rapportées par deux NuméRas. Faire dire par les élèves que deux NuméRas sont allés chez VendRa chercher des boites de KisKas. Un des NuméRas y est allé plusieurs fois (lequel ?), combien de boites a-t-il rapportées à chaque fois ? Un autre l'a accompagné une seule fois (lequel ?). Ou bien que deux NuméRas sont allés simultanément chez VendRa, l'un a passé une commande par paquets (lots), l'autre a commandé le nombre de boites qu'il peut transporter. **Faire vivre la scène par les élèves.** Par exemple, l'écriture $3 \times 4 + 5$, peut se traduire en histoire des deux manières suivantes : *Premièrement* : RaQuatre est allé trois fois chez VendRa, il a donc rapporté 3×4 boites de KisKas, RaCinq l'a accompagné une fois et a rapporté 5 boites. Ce qui fait en tout $3 \times 4 + 5$ boites de KisKas. Mais VendRa n'est pas content ! *Deuxièmement* : RaTrois est allé chez VendRa avec RaCinq, RaTrois a commandé trois paquets de quatre boites et RaCinq a commandé cinq boites.	Se représenter la situation avec les NuméRas. Verbaliser la situation à chaque exercice afin de donner la priorité au calcul multiplicatif. Vivre la scène. Calculer, soit en se souvenant des résultats, soit par essais et erreurs.
37. Calculs multiplicatifs, égalités lacunaires	Chercher Se représenter une situation traduite par une égalité	Mission à faire impérativement après la mission précédente. Prendre une égalité lacunaire, demander aux élèves de reconstituer une histoire telle que celle décrite en 31.	Stratégie efficace : essais et erreurs. Se représenter la situation par référence aux NuméRas (afin de donner priorité au calcul du produit. Procéder de mémoire ou par essais et erreurs.