La très grande fête

5

Angle droit et alignement
La notion de distance, de différence

Le lecteur intéressé par davantage de missions ou de détails d'ordre pédagogiques peut consulter le guide pédagogique dans son intégralité.

Voir onglet *accompagnement/guide pédagogique*

OBJECTIFS ET CHOIX MATHEMATIQUES

Cette unité vise les objectifs suivants :

- introduire **l'angle-droit** en réponse à un problème

  Ce concept sera introduit comme permettant de réaliser le plus court chemin entre un point extérieur à une droite (un grand trait ici) et cette droite.

- introduire **la notion de distance entre deux nombres**

  Ce concept, qui se traduit mathématiquement comme la valeur absolue de l'expression x – y, x et y étant deux nombres donnés, sera introduit à partir de déplacements sur un plateau de jeu. En effet, lorsque deux pions se déplacent du même nombre de cases dans le même sens, la distance entre ces deux pions, c'est-à-dire le nombre de pas qu'il faut faire pour aller de l'un à l'autre, ne change pas. On dit que la distance est invariante par translation.

  Ce concept est un outil précieux lorsqu'il s'agit de calculer une différence entre deux nombres puisqu'il se traduit par la relation suivante :

  pour tout a, tout x, tout y, $x - y = (x + a) - (y + a)$.

- introduire des **techniques de calcul en ligne**

  La distance entre deux nombres permet d'effectuer bien plus simplement certains calculs en ligne, surtout les soustractions.

- poursuivre les **entrainements au calcul** de sommes, de différences,
- **gérer des données** (utiliser un **tableau** pour organiser et gérer des données, convertir un tableau en **histogramme** pour mieux visualiser les données),
- **représenter,**
- **modéliser,**
- poursuivre les entrainements à la **résolution de problèmes** et de **problèmes ouverts**.

ACTIVITES EN MATHEMATIQUES

Introduction

En géométrie

Cette unité introduit l'angle droit dans un contexte d'optimisation. L'angle droit permet en effet de trouver le chemin le plus court pour aller d'un point extérieur à une droite vers cette même droite. C'est ce point de vue qui prévaut dans l'histoire. Il convient de noter que dans *angle droit*, à ce stade en cycle 2, le mot *droit* ne doit pas être considéré comme un adjectif puisque la notion d'angle n'a pas été abordée et ne figure pas aux programmes. Comme le mot *pomme de terre*, le mot *angle droit* est un mot composé.

Les élèves sont donc invités à

- découvrir l'angle droit par des manipulations et des comparaisons de longueurs,
- fabriquer une équerre par pliage,
- reproduire des angles droits en utilisant une équerre,
- découvrir le rectangle comme figure obtenue par réitération de tracés d'angles droits (les autres propriétés du rectangle ne sont pas encore vues comme l'égalité des longueurs de certains côtés),
- découvrir le triangle rectangle,
- découvrir du vocabulaire : sommet d'un triangle, côté d'un triangle, d'un rectangle.

Dans le domaine numérique

Cette unité introduit, en lien avec des déplacements sur une droite graduée (piste de jeu), la notion de distance entre deux cases comme étant le nombre de pas pour aller d'une case à une autre. Cette notion de distance sera étendue au concept de distance entre deux nombres. Le lien entre les cases. Les cases étant numérotées en continu, dans l'ordre naturel des nombres, le lien entre ces deux notions s'établit aisément. Le jeu proposé, appelé ici *Jeu de l'escargot*, permet de mettre en relief la propriété dite *d'invariance de la distance par translati*on.

Cette propriété, fondamentale pour le calcul en ligne, se traduit au niveau de l'école par :

pour tout a, tout x, tout y (inférieur à x) : x – y = (x + a) – (y + a).

Cette propriété permet d'effectuer « simplement » des calculs comme 73 – 27 après avoir constaté que soustraire un nombre entier de dizaines est plus facile que de soustraire un autre nombre.

La propriété précédente permet d'écrire l'égalité : 73 – 27 = (73 + 3) – (27 + 3) soit encore

73 – 27 = 76 – 30 = 46.

Un premier entrainement sur les différences dans lequel le nombre à soustraire est un multiple de dix facilite cette approche.

Note 1 : on pourrait aussi soustraire un même nombre aux deux nombres, ce qui correspondrait à reculer d'un même nombre de cases sur la ligne graduée, mais il est moins aisé d'effectuer le calcul ci-dessus en diminuant chacun des termes de la différence de 7.

Note 2 : la propriété énoncée ci-dessus est au fondement de certains algorithmes de la soustraction posée.

Les élèves seront donc invités à :

- découvrir par les manipulations la propriété ci-dessus,
- effectuer des soustractions dans lesquelles le nombre à soustraire est un multiple de dix,
- trouver les compléments à la dizaine supérieure de certains nombres,
- manipuler les égalités pour effectuer des calculs de distance entre deux nombres.

Une autre technique de soustraction peut aussi être proposée aux élèves. Elle peut apparaitre aux élèves suite à des observations de calculs du type 99 - x. Les soustractions les plus simples à effectuer étant en effet celles du type 99 – x où x est inférieur ou égal à 99. Cette technique repose sur la même propriété fondamentale énoncée ci-dessus.

L'exemple précédent se traite alors de la manière suivante

$73 – 27 = (73 + 26) – (27 + 26) = 99 – 53 = 46$

Dans un premier temps, on cherche le complément du premier terme à 99 (il n'y a pas de « retenue »), dans un deuxième temps, on ajoute ce complément au deuxième terme de la soustraction (il peut y avoir des « retenues »).

Activités suggérées

Calculs

La consolidation de la numération de position nécessite de très nombreux exercices de transformations d'écritures des nombres, de comparaisons d'écritures des nombres, de rangement d'écritures des nombres (relation d'ordre), de calculs. Dans cette unité, seul le calcul en ligne sera proposé[1]. Des techniques de calcul posé seront proposées ultérieurement, lorsqu'elles seront absolument nécessaires.

Plusieurs techniques de calcul en ligne sont proposées dans les missions. Les missions qui introduisent ces techniques débutent par un développement explicite de ce calcul, développement qui devra impérativement être réalisé par l'enseignant au tableau, en parfaite congruence avec les manipulations nécessaires, après avoir réalisé les activités « concrètes », les manipulations, proposées ci-dessous.

Ces techniques reposent sur les décompositions des nombres, sur le fait qu'il est plus facile d'additionner deux nombres dont l'un est un multiple de dix, de soustraire deux nombres quand le nombre à soustraire est un multiple de dix.

Cas de la soustraction

Pour la soustraction, la propriété fondamentale qui permet de passer d'une écriture à une autre est fondée sur le fait que la différence entre deux nombres traduit une distance entre ces deux nombres. La formule : « Pour tout x, tout y, tout a : $x - y = (x + a) - (y + a)$ » est l'articulation de tout travail sur la soustraction.

Cette formule doit être mise en place dans un premier temps par un vécu des élèves, par exemple un déplacement sur un sol carrelé, dans des escaliers, ou en jouant véritablement au jeu de l'escargot, en vivant ce jeu physiquement, en vivant physiquement les situations d'évaluation d'une distance (en pas, en nombre de cases, numérique).

Institutionnaliser ce résultat

Distance

La distance entre deux cases, c'est le nombre de pas qu'il faut faire pour aller d'une case à l'autre.

La distance entre deux nombres, c'est leur différence (dans le bon ordre !).

La distance entre les nombres 38 et 65 est 65 – 38.

La distance entre deux nombres ne change pas si j'ajoute le même nombre à chacun des deux nombres.

[1] Voir à ce sujet le document : Le calcul en ligne au cycle 2, eduscol.eductation.fr

Calcul d'une différence

La différence entre deux nombres, c'est leur distance.

Pour calculer une différence entre deux nombres, je peux ajouter le même nombre aux deux nombres.

Exemple : calculer 65 – 38

Il est plus facile de soustraire[1] 40 que 38. J'ajoute 2 à chacun des deux nombres et j'ai les égalités :

65 – 38 = (65 + 2) – (38 + 2) = 67 – 40

Je trouve : 65 – 38 = 67 – 40 = 27.

Note : c'est comme ajouter 0 sous la forme 2 – 2.

Faire ensuite trouver aux élèves le nombre qu'il faut ajouter aux deux termes d'une différence pour que le calcul soit facile à effectuer, faire varier les nombres en demandant par exemple aux élèves d'en donner eux-mêmes. Bien évidemment, cette méthode est la plus pertinente lorsque l'on soustrait un nombre entier de dizaines. La recherche de ce nombre est un pivot du calcul soustractif.

[1] Certaines missions permettent de le constater, ne pas hésiter à augmenter le nombre des calculs « simples » du type 84 – 50, etc., calculs dans lesquels on soustrait un nombre entier de dizaines car il est à la base de la technique de calcul en ligne proposée.

Compléments : autres approches des calculs soustractifs

Une autre méthode, en lien avec l'algorithme de la soustraction dit « par démolition » pourrait être présentée (en la scénarisant) de la manière suivante aux élèves :

1. CasseRa a une autre méthode pour calculer 53 – 18. Il explique comment il fait.

C'est comme si j'ai 5 boites de dix haricots et 3 haricots libres et que je dois te donner 18 haricots. Je t'en donne d'abord 10. Il me reste 4 boites de dix haricots libres et 3 haricots libres. Je n'ai pas assez de haricots libres pour te les donner, mais j'ai beaucoup de haricots, j'en ai encore quarante-trois. Je peux donc te les donner. Je vais libérer des haricots en cassant une dizaine. J'ouvre une boite de dix haricots libres. J'ai alors 3 boites de dix haricots et treize haricots libres. Je te donne 8 haricots libres. Il me reste 3 boites de dix haricots et 5 haricots libres. Le résultat est donc 35.

Il est ensuite possible de présenter les calculs de la manière suivante :

Fais comme CasseRa pour calculer 64 – 27.

Je te donne d'abord ______________________________. Il me reste _________

____

J'ouvre une boite, j'ai maintenant _______________________________________

____

Je te donne ___ haricots libres. Il me reste _____________________________

2. RaQuatre-vingt-dix-neuf propose une autre méthode. Il a en effet observé que si un NuméRa est sur la case 99 de l'escargot, la distance avec n'importe quel autre NuméRa, situé sur n'importe quelle case est facile à calculer.

Voici comment il calcule 53 – 28.

Il dit : « Du nombre que je préfère, on peut soustraire facilement n'importe quel nombre qui s'écrit avec deux chiffres. Par exemple, calculer 99 – 57, c'est facile. J'enlève 7 unités libres des 9 unités libres de 99, il reste 2 unités libres. J'enlève 5 dizaines des 9 dizaines de 99, il reste 4 dizaines. Le résultat est donc 42.

Pour la différence 53 – 28, je pense à la distance 53 – 28 et je sais que je peux ajouter le même nombre aux deux termes de la différence. Je veux transformer 53 – 28 en 99 – ___ . Il faut que je trouve ce qui manque. Pour aller de 53 à 99, j'ajoute 4 dizaines et 6 unités libres, j'ajoute 46. Je vais donc ajouter 46 à 53 et ajouter 46 à 28. Cela me donne :

53 – 28 = 99 – (46 + 28). Je calcule 46 + 28, je trouve 74.

J'ai 53 – 28 = 99 – 74 = 25.

On peut poursuivre en faisant exécuter des calculs selon cette même stratégie. Par exemple : Fais comme RaQuatre-vingt-dix-neuf pour calculer 73 – 37.

73 – 37, c'est une distance. Je peux aussi l'écrire 99 -……

Pour aller de 73 à 99, j'ajoute ___. J'ajoute aussi ___ à ___. Je trouve ___.

J'ai 73 – 37 = 99 - ___ = ___

Pour aller de 73 à 99, j'ajoute ___. J'ajoute aussi ___ à ___. Je trouve ___.

J'ai 73 – 37 = 99 - ___ = ___

Prolongement : Gérer des données

Il s'agit de parier sur des NuméRas qui peuvent ou non gagner en un seul jet de deux dés, le nombre de pas à effectuer étant indiqué par la somme des nombres marqués par les deux dés.

Objectifs : approche de la notion de « chance »

- **expérimenter** pour faire apparaitre la notion de « chance »,
- exercer son esprit d'analyse,
- **gérer des données,**
- utiliser un tableau,
- transformer un tableau en histogramme,
- **modéliser** (tableau théorique, histogramme théorique),
- **communiquer** sa démarche, l'évolution de sa pensée.

UNE SITUATION DE JEU

Cette situattion peut se vivre n'importe où.

Matériel : prévoir un jeu de deux dés par joueur, un plateau de jeu de type « jeu de l'oie » avec des cases numérotées dans l'ordre croissant des nombres jusqu'à une case dite « arrivée ».

Le jeu de l'escargot (jeu de l'oie) permet de faire des paris sur la chance[1] que l'on a de gagner. Pour cela, procéder de la manière suivante :

Phase 1 : dévolution des règles du jeu.

Le numéro de la case d'arrivée peut varier d'un jour à l'autre. Imaginons, dans ce qui suit, qu'il s'agit du numéro 65.

Placer un pion sur une case du jeu plateau décrit ci-dessous et lancer deux dés. Le pion atteint ou non la case 65 en fonction de la somme des deux nombres indiqués par les dés. Pas d'aller et retour possible. Faire répéter quelques fois cette opération par des élèves.

Phase 2 : paris, jeu et questionnement

Demander aux joueurs de choisir une case sur laquelle ils placent leur NuméRa préféré pour qu'il ait le plus de chance de gagner en **un seul lancé** de dés.

Chaque élève note la case qu'il a choisie. Le jeu peut commencer.

- imaginer que la case d'arrivée du jeu soit la case 65. Il est obligatoire que la somme des nombres indiqués par les deux dés que l'on jette indique exactement la distance à parcourir pour gagner la case 65 (le nombre de pas).
- noter les cases choisies par les joueurs (amorcer un tableau dont les numéros de cases constituent la première colonne et dans lequel on placera les nombres non choisis situés entre ceux qui ont été choisis, on indiquera par exemple en les barrant qu'ils n'ont pas été choisis). Placer les NuméRas (les pions) sur les cases choisies,
- par exemple : les cases 52, 53, 55, 57, 58, 60, 63, 64[2]

[1] Ne pas tenter de définir ce mot avant. Le travail qui suit s'effectue à partir du concept usuel de ce mot « chance » chez les élèves.
[2] Certaines de ces cases ne seront pas choisies (par exemple celles qui sont le plus éloignées de l'arrivée), dans ce cas, l'enseignant dira que tel ou tel NuméRa a choisi une de ces cases (cases impossibles ou cases peu probables).

- jouer et noter les résultats dans le tableau amorcé –on incrémente à chaque jet le nombre de victoires-, dans une deuxième colonne (effectuer plus de 300 jets, de manière espacée ou non dans le temps). Les jets se font joueur par. Chaque joueur conserve une trace de ses résultats dans un tableau analogue au tableau ci-dessous.

Exemple de tableau pouvant être tenu par un joueur :

Colonne de gauche : la valeur indiquée par la somme des nombres marqués par les deux dés,

colonne de droite : le nombre de fois où cette valeur apparait[1].

Pas à faire	Nombre de fois où ce nombre sort	NuméRa gagnant
12	1	Ra____
7	2	

Le nombre de lignes de ce tableau augmentera en fonction des expériences. Une réorganisation de ce tableau s'effectuera par permutations des lignes pour indiquer les nombres de pas à faire par ordre croissant.

Phase 3 : mise en commun des résultats, constats, analyse

- remplir unseul tableau en collectant toutes les données de tous les joueurs,
- transformer ce tableau en fabriquant un histogramme contenant « en abscisse » les numéros des cases sur lesquelles ont été placés les pions (les NuméRas), et « en ordonnée » le nombre de fois qu'ils ont gagné.
- constats : répondre intuitivement à la question « quels NuméRas ont le plus de chance de gagner ? » Sur quelle case doivent-ils se placer pour avoir plus de chance de gagner ?

Phase 4 : nouveaux paris

- après cette phase de jeu, demander aux joueurs s'ils veulent modifier la case de départ de leur NuméRa,
- pour ceux qui le désirent : changement de case pour que leur NuméRa préféré ait le plus de chance de gagner en **un seul** lancé simultané des deux dés
- jouer (effectuer plus de 300 jets)
- constats

Phase 5 : justification

- demander aux joueurs pourquoi il en est ainsi,
- débat, recherche d'explications, on note les explications fournies par les joueurs,

[1] Les résultats apparaissant petit à petit, l'élève fera donc évoluer son tableau en fonction de ces résultats. Un tableau comportant tous les résultats possibles sera réalisé collectivement après expérimentation.

- remplir collectivement un tableau à double entrée, en colonne, on indique le nombre marqué par le dé bleu, en ligne, celui marqué par le dé rouge
- On obtient un tableau comme le suivant, dans lequel figurent les sommes des deux nombres indiqués par les dés :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Le tableau (à faire réaliser par les élèves joueurs dans d'autres cas de figures obtenus par exemple en modifiant les valeurs sur les dés) montre que la valeur 2, tout comme la 12 est défavorisée, que la valeur 7 est la plus favorisée, donc la case 58 dans le cas où la case d'arrivée porte le numéro 65, noter aussi que certaines cases ne permettent pas de gagner en un seul lancé de dés (par exemple, dans ce cas de figure, la case 64).

- transformer ce tableau en histogramme, comparer l'histogramme expérimental et l'histogramme théorique.
- conclure à propos du choix de la meilleure case.

Indications et commentaires à propos des missions

Certaines missions nécessitent en préalable un travail en français qui permet de mieux comprendre et réaliser les activités mathématiques. L'histoire courte précise à quel moment il est préférable de faire les activités en français.

Missions	Compétences	Commentaires	Stratégie élève
2. Tracer des segments formant un angle droit	Représenter le réel Tracer Utiliser le règle et l'équerre	Etre très attentif au soin apporté au tracé. Répéter cette mission un grand nombre de fois jusqu'à la réussite de tous les élèves. Repère oblique.	Ajuster la règle le long du trait représentant la route. Faire glisser l'équerre contre cette règle jusqu'à la faire passer par le point donné (à l'épaisseur d'un trait de crayon près).
8. Dessiner des angles droits	Cf. 2	Cf. 2	Cf. 2
13. Aligner des points	Représenter des droites. Utiliser le règle	Etre très attentif au soin apporté au tracé.	Placer la règle tangente aux deux disques représentant les deux points A et B. Tracer une droite passant par les centres de ces points. Recommencer pour les points C et D. Le pointI se trouve à l'intersection de ces deux droites.
14. Trouver des alignements	Repérer des alignements avec une règle.	L'énoncé nous dit que des points sont alignés. Il faut trouver les meilleurs alignements. H, F, E ; D, E, C ; B, E, J.	Faire passer la règle de la même manière pour les trois points testés.
21. Compléter des égalités lacunaires additives et soustractives	Calculer Calculer en ligne Compléter des égalités lacunaires.	Deux stratégies possibles. Mettre en commun ces deux stratégies. En conserver trace écrite.	Stratégie 1 : Comprendre que compléter l'égalité a + ___ = c c'est trouver c – a et procéder comme ci-dessus. Stratégie 2 : compléter à la dizaine supérieure et poursuivre.

Les pas de ChanteRa

Pour faire 15 pas, les dés doivent indiquer (procéder systématiquement)

6 et 6 et 3 ou 6 et 5 et 4.

Attention, si on tient compte des couleurs des dés , il faut trouver systématiquement toutes les solutions.

Il était sur la case 48.

