De nouveaux NuméRas à numéro 3

Limite des désignations additives des nombres

Le lecteur intéressé par davantage de missions ou de détails d'ordre pédagogiques peut consulter le guide pédagogique dans son intégralité.

Voir onglet *accompagnement/guide pédagogique*

OBJECTIFS ET CHOIX MATHEMATIQUES

Du point de vue des connaissances, cette unité vise à :

- **Montrer les limites** de la désignation des nombres par décompositions additives**,**
- **Consolider** le sens du signe de l'égalité : =,
- **Approcher des problèmes de partage**, problèmes relevant de la division euclidienne très naturellement introduite par les décompositions sous contraintes pratiquées par les NuméRas, donc les élèves. Ces problèmes de partage se présentent sous deux formes : recherche de la valeur d'une part, recherche du nombre de parts.
- **Travailler les conversions de registres** : les écritures relevant des divisions euclidiennes sont l'occasion d'un travail sur l'articulation entre le registre de la langue naturelle, celui des écritures symboliques mathématiques et le registre des représentations figurales.

Du point de vue des compétences, cette unité vise à :

- **Consolider** les manipulations d'écritures additive (compositions, décompositions),
- **Consolider** la manipulation des égalités,
- **Développer des compétences en résolution de problèmes** (problèmes relevant de la division euclidienne),
- **Développer les compétences à comprendre et à effectuer des conversions de registres.**

A partir de cette unité, l'histoire à lire aux élèves devient plus longue et plus complexe. Elle ne figure plus quasi-intégralement dans l'histoire courte et gagne donc être lue et relue de manière magistrale en travaillant la compréhension à l'oral.

Travailler cette compréhension n'impose nullement que tous les mots soient compris et maitrisés par les élèves. La compréhension du sens global et de tout ce qui relève des mathématiques constituent les objectifs essentiels de cette lecture.

ACTIVITES EN MATHEMATIQUES

Introduction

Les activités mathématiques qui accompagnent cette unité relèvent des décompositions additives de grands nombres. Tous les nombres peuvent en effet, quelle que soit leur taille, s'écrire sous forme additive à partir des dix premiers nombres. Mais décomposer des grands nombres avec les seuls nombres 0 à 9 conduit souvent à des écritures très longues, trop longues pour être facilement reconnues et pour être retenues dans le cadre d'une commande orale par exemple.

Chaque NuméRa à numéro peut cependant réduire, au maximum pour lui, toute écriture additive en utilisant un maximum de fois le nombre inscrit sur son dossard. Cela donne l'occasion de transformer des écritures en mobilisant un maximum de fois le nombre associé à chaque NuméRa à numéro, auquel se rajoute un reste inférieur strictement à ce nombre. On reconnait là l'écriture d'une division euclidienne, écriture qui conduira à la résolution de quelques problèmes relevant de la division.

L'observation de la longueur des écritures montre que RaNeuf réalise toujours des écritures plus courtes[1] que tous les autres NuméRas. C'est donc en mobilisant un maximum de 9, c'est-à-dire en formant des paquets les plus gros possibles à ce stade de l'évolution des mathématiques sur Gée, que seront écrits les dossards de tous les nouveaux NuméRas à numéro. Le processus de construction des nombres qui prévaut alors est fondé sur le fait que le successeur de tout entier n s'obtient en ajoutant 1 à l'entier précédent. Le successeur s'écrit alors $n + 1$. Cette manière de désigner les nombres rejoint alors la construction axiomatique des nombres au sens de Peano (Voir encadré).

Axiomatique de Peano (1858-1932)

1. Il existe un ensemble non vide noté **N** dont le premier élément est noté 0 et appelé zéro.

2. Tout entier naturel n a un unique successeur, noté n + 1.

3. Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur.

4. Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux.

5. Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à **N**.

Ces écritures deviennent vite illisibles, ce qui va montrer la limite des désignations additives des nombres.

Le choix a été fait de désigner dans un premier temps les grands nombres en langue naturelle puisque de nombreux élèves connaissent une liste de noms de nombres qui dépasse largement « dix ». Le processus de désignation à deux chiffres des nombres sera introduit dans l'unité suivante en réponse au problème de l'illisibilité des écritures additives. L'association entre désignations en langue naturelle et écritures chiffrées sera alors établie (unité suivante).

[1] Au sens large, ce qui signifie que RaNeuf a toujours l'écriture la plus courte mais qu'il peut ne pas être le seul a l'avoir.

Activités suggérées

Une des activités consiste à écrire en mots, sous la dictée des élèves, la liste des noms de nombres permettant de désigner en langue naturelle l'ensemble de tous les NuméRas à numéro maintenant présents. On la fera figurer sur des affiches aux murs de la classe. Les écritures sur les affiches seront organisées par dizaines (trente, trente-et-un, …, trente-neuf ; cinquante, cinquante-et-un, …. cinquante-neuf, etc.). Les élèves ne connaissant pas par cœur certains noms de nombres utiliseront ces affiches comme référents et les apprendront par imprégnation. Ils les apprendront de manière systématique lorsque le système sera organisé et explicité ultérieurement. Ils apprendront aussi à écrire ces noms de nombres par copie experte. Les affiches resteront au mur de la classe le temps qu'il faudra. Elles serviront de référence pour l'écriture correcte des noms de nombres en mots par les élèves.

Une réduction des affiches sera collée dans le *Cahier des NuméRas* de chaque élève.

Manipulations

Le mieux serait de s'en dispenser, mais pour les élèves qui en auraient vraiment besoin, prévoir un petit matériel en grand nombre pour leur permettre de fabriquer les écritures en chiffres des dossards des NuméRas à numéro. Les élèves formeront alors des paquets de 9 objets et découvriront un reste inférieur strictement à 9. Pour écrire des commandes les plus courtes à la manière de RaN, les élèves formeront des paquets de N objets, laissant apparaitre un reste strictement inférieur à N.

Ce matériel sera aussi utilisé par certains élèves pour transformer des écritures de nombres ou pour trouver les écritures les plus courtes des nombres rédigées sous contraintes comme RaN qui ne peut pas utiliser de nombre supérieur à N dans les décompositions additives qu'il produit.

Après toute manipulation, il est indispensable de fixer par écrit le résultat obtenu en associant tout paquet à son nombre d'éléments et le cardinal de tout tas à la somme des cardinaux des paquets qui le constituent.

Quelles traces écrites conserver ?

Des traces écrites portant sur les outils ou les stratégies

Voir dans le tableau des missions pour une description de quelques stratégies possibles (liste non exhaustive). Exemple :

Pour écrire des commandes comme RaSix :

- je fais le plus possible de paquets de 6 haricots, j'écris le nombre de haricots avec le signe +, par exemple 6 + 6 + 6 + 4,
- si j'ai un dessin, j'entoure les paquets de 6, et j'écris autant de fois 6 qu'il y a de paquets entourés. Je n'oublie pas le reste. J'écris par exemple 6 + 6 + 6 + 6 + 5.
- par le calcul, je trouve les paquets de 6 dans ma tête en cassant des paquets plus gros ou en groupant des paquets plus petits (comme avec les haricots).

Indications et commentaires à propos des missions

Certaines missions nécessitent en préalable un travail en français qui permet de mieux comprendre et réaliser les activités mathématiques. L'histoire courte précise à quel moment il est préférable de faire les activités en français.

Missions	Compétences	Commentaires	Stratégie élève
1. Décomposer, recomposer	Calculer Observer Décomposer additivement Composer additivement Modéliser Calculer mentalement	Prévoir le petit matériel pour différencier. Conserver une trace écrite des stratégies.	Manipuler. Réécrire l'égalité en enlevant et en ajoutant pour faire des paquets de taille souhaitée. Calculer mentalement
5. Décomposer, recomposer	Utiliser le fait que le suivant d'un nombre *n* est *n + 1* Composer	Ce travail peut prendre appui sur l'affichage des noms de nombres et sur le texte de lecture.	L'élève prend appui sur l'affichage et sur le nombre 9. Il ajoute successivement 1 pour désigner les NuméRas et écrire leurs dossards.
11. Résoudre un problème ouvert	Chercher Raisonner Calculer Justifier	Ce problème ouvert est un problème de recherche systématique. S'assurer de la compréhension de l'énoncé en faisant reformuler. Mise en commun : retenir les écritures qui conviennent : 6 + 6 [le Plus petit commun multiple de 6 et 4 –information pour l'enseignant et lui seul !-] 6 + 6 + 6 + 6, 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6, ces trois nombres peuvent aussi se désigner avec uniquement des 4. On peut laisser des élèves en trouver d'autres. Conserver une trace écrite des stratégies dans le *Cahier de recherches.* Les justifications se font par l'écriture des égalités : Parce que 6 + 6 = 4 + 4 + 4, etc. ou « parce que les commandes sont égales »	Manipuler : prendre des tas de haricots, les décomposer en paquets de quatre et en paquets de six et trouver des solutions par essais et erreurs. Rechercher systématiquement : Dire que RaSix écrit 6, former le maximum de 4. 6 = 4 + 2 (6 n'est pas solution). Ecrire alors 6 + 6, transformer en faisant apparaître un maximum de 4. 6 + 6 = 4 + 4 + 4 Ce nombre convient.

15. Problème de partage, recherche de la valeur d'une part, donner sens à l'écriture d'une division euclidienne pour la compréhension de la consigne.	Modéliser Représenter Chercher Calculer	Il s'agit d'un problème de partage dans lequel on recherche la valeur d'une part. On rédige ensuite une écriture mathématique qui permet de justifier. La consigne est double : chacun a autant que les autres et la valeur maximale possible. S'assurer en faisant reformuler que les élèves ont compris cette double contrainte qui caractérise les divisions euclidiennes. Cette mission consolide, avec un autre point de vue le travail effectué dans la mission 6 puisque les justifications mathématiques sont identiques. L'écriture de la division euclidienne relative à ce partage est 9 + 2 + 9 + 2 + 9 + 2 + 2 cerises (on acceptera évidemment aussi la réponse 11 + 11 + 11 + 2 cerises). Chaque petit-enfant reçoit 9 + 2 ou 11 cerises. Il reste 2 pommes à Mamy. Proposer d'autres situations analogues en faisant varier les différents paramètres, afin d'entrainer les élèves à effectuer par tâtonnements des partages et à associer ceux-ci à des écritures du type « division euclidienne ». Conserver des traces écrites des stratégies.	Manipulation : prendre un tas de 8 + 9 + 7 + 6 + 5 haricots, les répartir au maximum possible dans trois tas, chacun correspondant à un petit-enfant. Les deux cerises qui restent ne peuvent plus être partagées car leur nombre est inférieur au nombre de petits-enfants. Dessin : représenter chaque cerise par une croix. Les distribuer de manière égale dans trois zones représentant chacune un petit-enfant. Plusieurs façons de travailler : partir du paquet de 9 cerises, en donner trois à chacun, écrire « il reste 8 + 0 + 7 + 5 + 5 cerises ». Prendre le paquet de 8, en donner deux à chacun, écrire : « il reste 2 + 0 + 7 + 6 + 5 cerises », donner deux cerises à chacun du paquet de 6, écrire : « il reste 2 + 7 + 5 cerises », etc. Calcul : compléter une écriture comme __ + __ + __ + __ en ayant prévu qu'il peut y avoir un reste. Former par essais et erreurs les paquets les plus gros possibles dans trois emplacements représentant les petits-enfants.